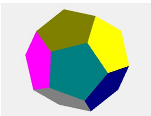
Potenssummen $S_q(n)$ af naturlige tal

$$S_q(n) = \sum_{k=1}^{n} k^q$$

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk



Ole Witt-Hansen 2005

1. Indledning

I det sidste nummer af LMFK bladet beskæftiger Torben Amstrup sig med det klassiske problem, at bestemme antallet af kugler i en kuglepyramide med form som et tetraeder. Som TA viser, er det let at se, at man skal beregne summen

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{k(k+1)}{4}$$

TM skriver: ”For mig blev det en blindgyde, at forsøge at beregne summen” $\sum_{k=1}^{n}k^2$,

altså summen af kvadrattallene fra 1 til n”.
Efter at have hørt professor Hans Tornehaves to første forelæsninger i Matematisk analyse i begyndelsen af september 1964, følte jeg også at mit liv var endt i en blindgyde, men det er nu ikke den eneste sammenhæng, der er med bemærkningen ovenfor. Tornehave indledte nemlig Mat1 med at indføre summationstegn og produkttegn, samt at vise nogle regneregler for disse. Han viste endvidere Binomialformlen, Cauchy – Schwarts ulighed (lidt tricky), samt nogle andre formler. (Polynomialformlen blev stillet som øvelsesopgave!). I den anden af de to forelæsninger, beviste han en generel rekursionsformel til beregning af potenssummerne:

2. Udledning af rekursionsformlen for potenssummerne

$$S_n(q)=1^q+2^q+3^q+...+n^q$$

For q = 2, svarer dette til den formel, som TM efterlyser. Selv om formlen således er velkendt, har jeg ikke kunnet finde den i de matematiske opslagsværker, som jeg er i besiddelse af.
Jeg har derimod forsøgt at rekonstruere Tornehaves bevis, som er gengivet nedenfor i min egen formulering.

$$S_n(q)=1^q+2^q+3^q+...+n^q=\sum_{k=1}^{n}k^q=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^q=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^q$$

Man anvender nu binomialformlen på hvert af leddene $(k+1)^q$, udtrækker leddet med den højeste potens q i summen og får:

$$S_q(n)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{q}{q}k^q+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}\binom{q}{j}k^j=1+S_q(n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}\binom{q}{j}k^j$$

Idet $S_q(n)-S_q(n-1)=n^q$ får man, når man samtidig ombytter summationsrækkefølgen i det sidste led.

$$n^q-1=\sum_{j=0}^{q-1}\binom{q}{j}\sum_{k=1}^{n-1}k^j$$

Man bemærker, at summen svarende til det sidste summationstegn er lig med $S_j(n\text{-}1)$. I denne formel erstatter man nu n med n+1, q med q+1 og udtrækker det sidste led i summen.

$$(n+1)^{q+1}-1=\sum_{j=0}^{q}\binom{q+1}{j}S_j(n) \Leftrightarrow \binom{q+1}{q}S_q(n)+\sum_{j=0}^{q-1}\binom{q+1}{j}S_j(n)$$

Idet $\binom{q+1}{q}=q+1$, får man da endelig rekursionsformlen ved at isolere $S_q(n)$.

$$(q+1)S_q(n)=(n+1)^{q+1}-\sum_{j=0}^{q-1}\binom{q+1}{j}S_j(n)-1$$

Hvis potenssummerne $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$..... $S_{q\text{-}1}(n)$ er kendte, kan man følgelig beregne en formel for $S_q(n)$.

Som det umiddelbar ses, giver formlen $S_0(n) = n$, og

$$2S_1(n)=(n+1)^2-1+S_0(n)=(n+1)^2-1-n=n(n+1) \Leftrightarrow S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

For $S_2(n)$ får man derefter:

$$3S_2(n)=(n+1)^3-S_0(n)-3S_1(n)-1=(n+1)^3-n-\frac{3n(n+1)}{2}-1=$$
$$(n+1)(n^2+1+2n-1-\frac{3}{2}n)=(n+1)(n^2+\frac{1}{2}n)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

Hvorefter følger formlen for $S_2(n)$ i overensstemmelse med den formel som TM udleder i nummer 3 af LMFK bladet.

$$S_2(n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Fortsætter man med nogle elementære, men lidt langstrakte algebraiske omformninger (som Tornehave formulerede det) får man:

$$S_3(n)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad \text{og} \quad S_4(n)=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

Bemærk at $S_3(n)=S_1(n)^2$ uden at nogen er i stand til at forklare hvorfor.

At bestemme antallet af kugler stablet i en tresidet pyramide, har været kendt i flere hundrede år. At stable kugler på denne måde kaldes ofte for Keplers kugler, fordi Kepler, sammen med Newton, Gauss med flere søgte at bevise, at det var den mest kompakte måde at stable kugler på. Det lykkedes dog ikke for nogen af dem. For 2 år siden udkom en bog hos Ingeniøren|Bøger, som hed

”Keplers kugler”, hvor der er beskrevet et ”bevis” for denne påstand. Jeg kender dog kun bogen af omtale.
Man kan naturligvis bestemme forholdt mellem rumfanget af kuglerne og rumfanget af det omsluttende tetraeder. Jeg har bestemt forholdet til 0,74. Dette kan sammenlignes med at stable kuglerne oven på hinanden i en kubus, hvor det tilsvarende forhold er 0,52.

Når jeg genoplever mine to første matematikforelæsninger, kan jeg godt blive lidt tankefuld. Jeg tvivler nemlig lidt på, at de matematikstuderende, som møder på H.C. Ørsteds instituttet i 2008 får den samme friske ilddåb til matematikstudiet, som jeg fik. Selvfølgelig interesserede vi os i 1964 også langt mindre for personlighedsudvikling og sociale kompetencer, med det pauvre resultat, at vi muligvis er blevet gamle mk’ere, der klamrer os til vores ubestridelige faglige kompetence, men med ringe forståelse for de bløde sociale og filosofiske værdier i naturvidenskaben. For os havde naturvidenskaben vel blot en elementær intellektuel appel, ligesom vi aldrig rigtig forholdt os kritiske til det samfundsgavnlige i at lære de to teoretisk fag Matematik og Fysik på (meget) højt niveau.

Ole Witt-Hansen

Køge Gymnasium.