Den heldige kat og golfkuglen

Af Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium.

For et års tid siden var der i Weekendavisen et indlæg fra en fysiklærer, hvor han fortalte, hvor let han havde ved at få nye elever til at interessere sig for fysik. (Jeg sank en klump). Dernæst præsenterede han sig som ung, (jeg sank endnu en klump) og senere i artiklen beskrev han sig selv som en meget populær lærer, der ikke underviste i stereotyper. Mismodet var ved at overvælde mig, men da mit navn ikke var nævnt eksplicit i artiklen, beroligede jeg mig med, at han nok udtalte sig i generelle termer.

Han udfordrede imidlertid læseren til at give en fysisk forklaring på nogle dagligdags problemer. Jeg vil kun tage udfordringen op på to af problemerne. Det første var, hvorfor et spædbarn slår sig mindre ved et fald end en voksen person. Den er nem. De får den samme hastighed, og samme acceleration ved mødet med underlaget, men da den resulterende kraft er proportional med massen, giver det en større kraftpåvirkning for den tunge person. Måske er eksemplet ikke så velvalgt endda.

Det man må regne med er nok trykket, som er omvendt proportional med kroppens tværsnitsareal, og man må også tage i betragtning, hvorvidt knoglerne består af ben eller brusk, og en analyse af dette hører til den mere komplicerede del af deformerbare legemers fysik.

Jeg vil hellere se på eksemplet, hvor en person på 75 kg og en kat på 5,0 kg falder ned fra 2 meters højde, fx fra et træ. Katten lander som bekendt altid på benene og får derved en bremsestrækning på skønsmæssigt 15 cm, mens personen falder på ryggen med en bremsestrækning på 2-3 cm afhængig af underlaget.

Anvender vi den kendte formel fra kinematikken: $2a(s-s_0)=v^2-v_0^2$ til først at bestemme hastigheden efter et fald på 2 meter, og dernæst til at beregne accelerationen, når hastigheden reduceres til 0 på strækningerne 3 cm og 15 cm får man først hastigheden

$$v=\sqrt{2gs}=\sqrt{4\cdot 9{,}82}\ \text{m/s}=6{,}3\ \text{m/s}\ ,$$

og dernæst de to accelerationer samt reaktionskraften $F_{res} = m{\cdot}a$ fra underlaget

$$a_{kat}=-\frac{v_0^2}{2\cdot s}=\frac{39{,}3}{2\cdot 0{,}15}\ \text{m/s}^2=131\ \text{m/s}^2$$

$$F_{res}=m\cdot a=5\cdot 131\ \text{N}=635\ \text{N}\approx 65\ \text{kp}$$

$$a_{uheldigperson}=-\frac{v_0^2}{2\cdot s}=\frac{39{,}3}{2\cdot 0{,}03}\ \text{m/s}^2=655\ \text{m/s}^2$$

$$F_{res}=m\cdot a=75\cdot 655\ \text{N}$$
$$=4{,}9\cdot 10^4\ \text{N}\approx 5{,}0\cdot 10^3\ \text{kp}$$

De to kræfter ses at svare nogenlunde til tyngden af en voksen kvinde og en afrikansk hunelefant, og kun det sidste må siges at være fatalt (i denne kontekst).

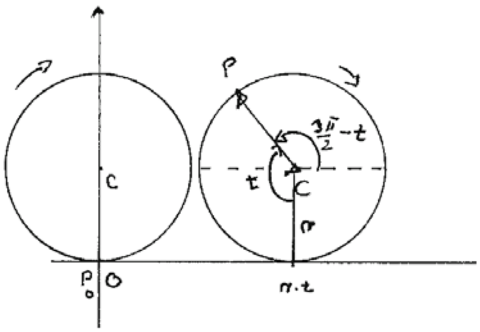
Den anden udfordring var betydelig mere subtil. Hvorfor er en golfkugle nubret? Artiklen antyder, at der var en aerodynamisk forklaring på dette, men da Navier-Stokes ligninger, som bekendt ikke kan løses for turbulent strømning, hvor man er henvist til dimensionsbetragtninger, Reynoldstal og resultaterne fra vindtunnelforsøg. Endelig ligner en golfkugle hverken spurvehøg eller en Concorde, så er det lidt svært at gennemskue.

Jeg tror, at forklaringen er en anden, nemlig at sikre en stabil bevægelse på greenen. Når golfkuglen er nubret, forøges friktionskoefficienten og dette bevirker, at der er tale om ren rulning.

Ren rulning betyder som bekendt, at den øjeblikkelige hastighed i røringspunktet er nul. Dette, kan man kvalitativt indse, idet alle punkter af kuglen har samme vinkelhastighed ω med hensyn til rotationsaksen. Hvis kuglen har radius *r*, bevæger massemidtpunktet sig med hastigheden $v_{CM} = \omega \cdot r$. Det øverste punkt af kuglen bevæger sig dermed med hastigheden $v = v_{CM} + \omega \cdot r = 2 \cdot \omega \cdot r$, mens røringspunktet bevæger sig med hastigheden $v = v_{CM} - \omega \cdot r = 0$.

Det kan imidlertid være interessant at se mere kinematisk på det, idet bevægelsen af et punkt på en cirkelperiferi, som ruller på en akse, som bekendt er en cykloide. Nedenstående er hentet fra de matematiknoter, jeg anvender i undervisningen.

Cykloiden er en klassisk parameterkurve. Det er den kurve, som et punkt af fælgen på et hjul beskriver, når hjulet trilles af sted. For at bestemme parameterfremstillingen, betragtes nedenstående figur.



Af figuren fremgår:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$$

$$= \begin{pmatrix} rt \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos(\frac{3}{2}\pi - t) \\ r\sin(\frac{3}{2}\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rt - r\sin t \\ r - r\cos t \end{pmatrix}$$

Parameterfremstillingen bliver da:

$$\overrightarrow{r(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rt - r\sin t \\ r - r\cos t \end{pmatrix}$$

Betragter vi cykloiden, som en funktion $y = f(x)$, så ses det at den er periodisk med perioden 2π.

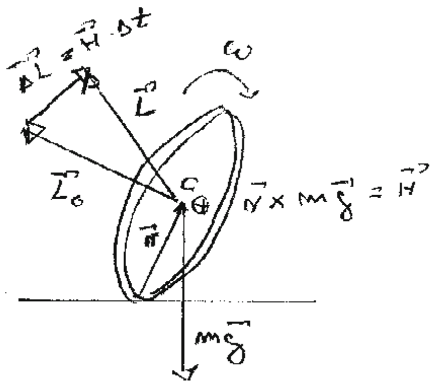
Differentialkvotienten bliver:

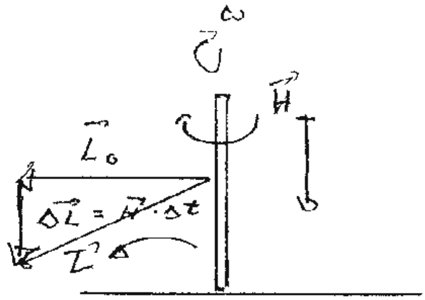
$$\overrightarrow{r'(t)} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$$

Idet hastigheden $\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{r'(t)} = \vec{0}$ for $t = 2p\pi$; $p \in Z$ er hastigheden nul i røringspunktet med aksen, og cykloiden har ingen tangent for $t = 2p\pi$.

Ren rulning giver en meget retningsstabil bevægelse, fordi impulsmomentet er bevaret. Det samme som garanterer retningsstabilitet af en cykel eller måske mest udpræget på en motorcykel.

Når man vil dreje på en (motor)cykel, skal man som bekendt ikke forsøge at dreje på styret, men læne sig ud i svinget. Tyngden vil levere et kraftmoment $\overrightarrow{\Delta H} = \overrightarrow{r_{CM}} \times m \cdot \vec{g} = \vec{L} \cdot \Delta t$, der ligger i hjulets plan, mens impulsmomentet er vinkelret på hjulets plan. Kraftmomentet fra tyngden, vil dreje hjulets impulsmomentet i den rigtige retning, så styret drejer. Hvis man i stedet blot drejer på styret (praktisk talt umuligt for en motorcykel i fart), vil det lodrette kraftmoment få cyklen til at vælte ud i svinget. De to situationer kan også karakteriseres som den nødvendige centripetalkraft og den fiktive centrifugalkraft. Dette er søgt illustreret på de to tegninger nedenfor





For en kugle, der ruller på et plant underlag, er tyngdens kraftmoment altid nul, og derfor er ren rulning en særdeles retningsstabil bevægelse. Inertimomentet af en kugle omkring en akse, der går gennem massemidtpunktet G er

$$I_G = \frac{2}{5}mr^2 .$$

Når man skal analysere virkningen af ydre kraftmomenter på rullende genstande, så gøres det altid i relation til en akse gennem røringspunktet med underlaget – den øjeblikkelige omdrejningsakse.

For inertimomentet gennem den akse, gælder ifølge Steiners sætning: $I_O = I_G + mr^2$, så

$$I_O = \frac{7}{5} mr^2$$

En golfkugle har r = *2* cm, og vejer 46 g, så man finder I_O =2,58 · 10^{-4} kg m^2. Bevæger golfkuglen med hastigheden 5,0 m/s, er vinkelhastigheden

$$\omega = \frac{v}{r} = 250 \text{ rad/s}$$

Impulsmomentet er herefter:

$$L_0 = I \cdot \omega = 0{,}0645 \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Vi vil da vurdere, hvor stor en impulsændring (fordi kuglen støder ind i græsstrå eller lignende), der skal til for at ændre retningen, så det kan mærkes. Påvirkes kuglen i et tidsrum Δt med en kraft $\vec{F}$ modsat bevægelsesretningen i punktet med stedvektoren $\vec{r}$, og vi antager at $\vec{r} \perp \vec{F}$, får kuglen en impulstilvækst $\overrightarrow{\Delta p} = \vec{F} \cdot \Delta t$ og en impulsmomenttilvækst $\Delta\vec{L} = \vec{H} \cdot \Delta t = \vec{r} \times \vec{F} \cdot \Delta t$. Impulstilvæksten vil blive opsuget af underlaget, hvis vi antager, at gnidningskoefficienten er (uendelig) stor – kuglen er jo nubret – mens impulsmomenttilvæksten, vil dreje impulsmomentvektoren, så kuglen ændrer retning. Under simplificerede antagelser kan udregnes, hvor stor kraften skal være for at kuglen får en impulsmomentændring på 1% af kuglens impulsmoment. Antages at Δt = 0,2 s, finder man.

$$r \cdot F \Delta t = 0{,}05 \cdot L_O \Rightarrow F = \frac{0{,}01 \cdot L_O}{r \cdot \Delta t} = 1{,}6 \text{ N}$$

Som det fremgår skal der en i denne sammenhæng betydelig kraft til at give golfkuglen en blot ubetydelig retningsændring. En golfkugle er yderst retningsstabil, når den udfører en ren rulning.

Helt anderledes forholder det sig, når kuglen kommer ind på et område med blot en svag hældning. En kugle på en hældning er helt analog til et hjul, der hælder (men sværere at tegne). Hvis skråplanets hældning betegnes ϑ, kan man indse, at $\Delta L = H \cdot \Delta t = m \cdot g \cdot r \cdot \sin\vartheta \cdot \Delta t$. Den vinkel $\Delta\varphi$, som impulsmomentet drejer i tidsrummet Δt, kan beregnes som:

$$\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi = \frac{H \cdot \Delta t}{I_O \omega} = \frac{m \cdot g \cdot r \cdot \sin\vartheta \cdot \Delta t}{\frac{7}{5} mr^2 \frac{v}{r}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{5\, g \sin\vartheta}{7v}$$

Vi vil da vurdere, hvor stor vinkelhastigheden i drejningen bliver, hvis hældningen er blot 5°, og hastigheden er 5 m/s. Man finder:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{5g\sin\vartheta}{7v} = 0{,}125 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

I løbet af

$$\Delta t = \frac{s}{v} = \frac{2 \text{ m}}{5{,}0 \text{ m/s}} = 0{,}4 \text{ s}$$

vil kuglen have ændret retning med 0,05 rad, som på 2 m skønsmæssigt vil bevirke, at kuglen passerer hullet i 10 centimeters afstand.

Nu forstår jeg (måske), hvorfor en golfkugle er nubret, men jeg forstår også, hvorfor professionelle golfspillere, "læser" greenen, før det laver et pot. Jeg troede egentlig, at det var spil for galleriet, men nogen har måske en evne til at se hældninger på ned til få grader. Alle der har set golf, har også set et pot med den helt rigtige retning, som pludselig (ved hekseri?), drejer uden om hullet. Det forstår jeg bedre nu. Det skyldes ikke modstand i græsset, men formodentlig svage hældninger i terrænet, hvor tyngdekraften kan få fat, og golfkuglen er hjælpeløs, da den ruller.

Selv om jeg måske forstår pointen i at rejse spørgsmålet, hvorfor en golfkugle er nubret, så har jeg ikke noget specielt lystbetonet forhold til at skulle gentage forklaringen i de to 1g'er jeg for øjeblikket har i fysik.

Når man skal få elever til at interessere sig for fysik, så hentes eksemplerne, som i dette tilfælde næsten altid fra mekanikken (og lidt fra gaslovene). Problemet er jo blot, at kinematikken og mekanikken efter 1988 er lagt sidst i pensum (og jeg har aldrig forstået hvorfor). I øvrigt tror jeg ikke, at rotation har været en del af det obligatoriske pensum siden 1980. Impulsbevarelse, hvor man også kan hente masser af eksempler fra dagligdagen præsenteres først i 3.g på A-niveau.

Jeg mener ikke, at man kan rigtig kan forklare noget fysik uden lovmæssigheder og uden, at man regner på det. Derfor er det stadig meget svært at finde eksempler i 1.g, som interesserer eleverne.

Teorien og alle de anvendte formler for rotation, har jeg hentet fra min lærebog: Elementær Fysik 2. For gymnasiet 1979. På trods af bogens titel er afsnittet om rotation ganske avanceret.◊