

Dæmpede periodiske bevægelser

OLE WITT-HANSEN, lektor emeritus

1. Den hoppende bold

Da jeg for nylig søgte på Google efter noget andet, stødte jeg tilfældigvis på en SRP-opgave om *Den hoppende bold*. Forsøgene var naturligvis lavet med optagelser af bevægelsen med højhastighedskamera og efterfølgende behandling i avancerede IT-programmer.

Det er jo snart en del år siden, hvor man erstattede simple instruktive forsøg, som skulle vise Galileis faldlove med videooptagelser, dataopsamling og IT-behandling.

Indtil 1988 lavede jeg *Det frie fald*, som den første fysikøvelse i 1g – efter først, at have gennemgået kinematikken naturligvis! Her målte man med et Leybold viserur den tid t , det tog en kugle at falde stykket s . Og det var altså kun ganske få elever, som ikke forstod, hvad der foregik.

Som en del af behandlingen af måleresultaterne, blev målepunkterne indsat på mm-papir med t^2 ud ad 1.aksen og s ud ad 2.aksen, hvorefter man visuelt konstaterede, at punkterne med tilnærmelse lå på en ret linie gennem (0, 0), og heraf sluttede man, at $s = k \cdot t^2$.

Linien blev tegnet, og hælningskoefficienten k blev beregnet. Ifølge faldlovene skulle den være $\frac{1}{2}g$, og det passede som regel med teorien inden for 5 %.

Og nej, dengang var formålet med forsøget ikke at forsøge at falsificere faldlovene, men at vise dem.

Hvad angår den helt elementære forståelse af, hvad fysik går ud på, så mener jeg stadig, at det er betydeligt mere instruktivt at lade eleverne selv foretage målingerne og selv behandle måleresultaterne, end et foretage dataopsamling til en computer, for derefter at lade et program sprøjte grafer og måleresultater ud.

Jeg medgiver dog, at jeg fagdidaktisk nok stadig er forankret i den pædagogiske senmiddelalder – altså tiden før 1988, hvor man faktisk lærte matematik og fysik i gymnasiet – på fagenes egne præmisser – og ikke blot som et ledsagende fænomen i den samfundsideologiske opdragelse.

Fordi, det vist nok var et krav, lavede jeg i 2010 en øvelse med en videooptagelse af det skrå kast. Men dels druknede forsøget totalt i tekniske problemer med optagelsen og problemer med anvendelse af databehandlingsprogrammet, og dels var elevernes fysikfaglige udbytte stort set lig med nul.

Det virker som om, at selv de allermost elementære teoretiske dele af fysikken er blevet fortrængt af eksperimentelle forsøg udført med IT.

Det kom jeg til at tænke på, da jeg læste rapporten om den hoppende bold. Der var masser af grafer, og beregninger af tab i energi, men ikke noget teoretisk argument for, hvordan stighøjden af bolden aftager med hvert stød mod underlaget.

Det er jo ellers meget ligetil at antage, at den kinetiske energi $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$, og dermed v^2 , aftager med en bestemt faktor α for hvert stød med underlaget.

Hvis bolden slippes fra højden h_0 , er hastigheden v_0 , når den rammer gulvet givet ved

$$v_0^2 = 2gh_0 \Leftrightarrow h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$$

Hvis energien aftager med en faktor α , vil højden efter et bump være

$$h_1 = \alpha \frac{v_0^2}{2g} = \alpha h_0$$

og sådan fremdeles, så $h_n = \alpha^n \frac{v_0^2}{2g} = \alpha^n h_0$.

Højden, som bolden kommer op i, aftager altså eksponentielt med antallet af stød.

Jeg har forsøgt at tælle antallet af bump udført med en massiv hoppebold, sluppet fra 1 meter, og det synes at være 13. Antager vi, at dette svarer til, at højden er reduceret til $0,01 \cdot h_0$, så får man altså $\alpha^{13} = 0,01$, som giver $\alpha = 0,7$. Der mistes altså 30 % af energien ved hvert stød.

Om antagelsen er rigtig, ved jeg ikke, men det kunne da have været oplagt (med det fine udstyr) at undersøge, om højden faktisk aftager eksponentielt, (og med hvilken faktor), for dog at få lidt teori ind i rapporten. Man kunne i øvrigt også beregne den tid, der går før bolden ligger stille.

Falder bolden fra højden h_0 , er faldtiden givet ved

$$h_0 = \frac{1}{2}gt_0^2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Den næste højde er $h_1 = \alpha h_0$. Da bolden både skal op til og ned fra højden er tiden

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{\alpha}t_0$$

Tilsvarende fås:

$$t_2 = 2(\sqrt{\alpha})^2 t_0, \quad t_3 = 2(\sqrt{\alpha})^3 t_0, \dots$$

Tiderne danner altså en kvotientrække med første led $2\sqrt{\alpha}t_0$ og kvotienten $\sqrt{\alpha}$.

Summerer vi op til uendelig og anvender formelen for en uendelig kvotientrække

$$S = a_0 \frac{1}{1-q}$$

får man

$$t_\infty = t_0 + 2\sqrt{\alpha} t_0 \frac{1}{1-\sqrt{\alpha}}$$

Slippes bolden fra højden $h_0 = 1$ m, er $t_0 = 0,45$ s. Heraf finder man $t_\infty = 5,1$ s, hvilket passer fint med, hvad man måler på et stopur.

2. Harmonisk svingning på fladt underlag

Hvis en klods, der er spændt op mellem to spiralfjedre på et plant bord, udfører harmoniske svingninger, vil den i almindelighed være påvirket af en gnidningskraft fra bordet.

Hvis massen af klodsens er m , fjederkonstanten er k , og gnidningskoefficienten mellem klods og bord er μ , er gnidningskraften som bekendt: $F_{\text{gn}} = \mu \cdot m \cdot g$, rettet mod bevægelsen.

Man kan herefter opstille en differentiaalligning for bevægelsen:

$$F_{\text{res}} = ma = -kx - \text{sgn}(v) \cdot \mu m g$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \frac{v}{|v|} \mu m g$$

hvor $\frac{v}{|v|}$ er fortegnet for hastigheden.

Det første led på højre side giver den sædvanlige harmoniske løsning, mens det andet led er lidt ubehageligt på grund af numerisktegnet. Vi er derfor nødt til at dele op i tilfældene $v > 0$ og $v < 0$.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu m g \quad \text{for } v > 0$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + \mu m g \quad \text{for } v < 0$$

Vi løser kun ligningen for $v > 0$, idet det kun er et fortegn, som skiller de to løsninger. Efter division med m fås

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x - \mu g \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \left(x + \frac{\mu m g}{k} \right)$$

Vi sætter $x_1 = x + \frac{\mu m g}{k} \Rightarrow \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}$

Det giver

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m} x_1$$

som har løsningen $x_1 = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_0 \right)$.

Indsættes da $x = x_1 - \frac{\mu m g}{k}$, får man

$$x = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_0 \right) - \frac{\mu m g}{k}$$

For $v < 0$ bliver løsningen naturligvis

$$x = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_0 \right) + \frac{\mu m g}{k}$$

Umiddelbart ser det lidt underligt ud med et konstantled i en harmonisk bevægelse, men vi skal huske på, at begyndelsesbetingelserne (amplituden) ændrer sig for hver halve svingning.

Vi sætter $\phi_0 = 0$, og starter bevægelsen ved $x = A$, hvor $t = 0$. Amplituden i den første halve svingning betegnes A_0 .

Da bevægelsen for $t > 0$ er rettet mod ligevægtsstillingen, anvender vi løsningen for $v < 0$. Der gælder, at

$$A_0 \cos(0) + \frac{\mu m g}{k} = A \Rightarrow A_0 = A - \frac{\mu m g}{k}$$

For den første halve svingning, bliver løsningen derfor:

$$x = A_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{\mu m g}{k} \Rightarrow$$

$$x = \left(A - \frac{\mu m g}{k} \right) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{\mu m g}{k}$$

Efter en halv svingning, er positionen $x = -A_1$. Amplituden A_1 fås, ved $\cos \pi$, og A_1 sættes da ind i løsningen for $v > 0$.

$$x = -A_1 = \cos \pi \cdot \left(A - \frac{\mu m g}{k} \right) + \frac{\mu m g}{k} \Rightarrow A_1 = A - \frac{2\mu m g}{k}$$

og løsningen bliver for den næste halve svingning:

$$x = \left(A - \frac{2\mu m g}{k} \right) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t - \frac{\mu m g}{k}$$

Udtrykket for den n 'te halve svingning bliver:

$$x = \left(A - n \frac{\mu m g}{k} \right) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \pm \frac{\mu m g}{k}$$

Svingningen vil dø ud, når amplituden nærmer sig 0. Ifølge ovenstående vil det ske, når

$$A - n \frac{\mu m g}{k} = 0 \Leftrightarrow n = \frac{Ak}{\mu m g}$$

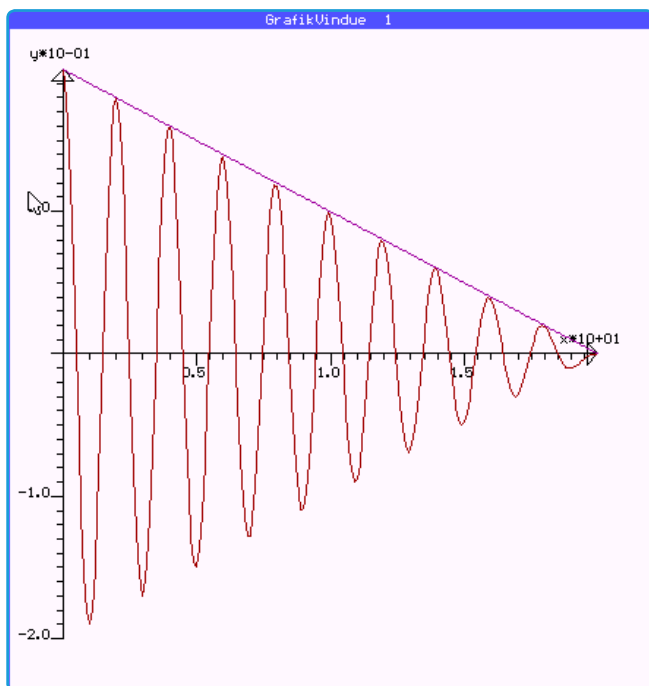
Det er ikke noget særligt problem at tegne graferne for $n = 1$,

2, 3..., men det er lettere at løse differentialligningen numerisk, og lade et matematikprogram tegne løsningen.

Som det ses af grafen nedenfor, aftager amplituden i svingningen lineært efter funktionen

$$y = A - \frac{2\mu m g}{k} x$$

som det også gælder for den analytiske løsning.



3. Dæmpede svingninger

Differentialligningen for den dæmpede harmoniske svingning er en af de allermest kendte i fysikken. Den opstår i talrige sammenhænge, fx i elektriske svingningskredse.

Lineære differentialligninger med konstante koefficienter, kan som bekendt løses med en kompleks eksponentialfunktion, mens løsningen på traditionel vis er lidt mere omstændelig.

For den harmoniske oscillator, antager man, at luftmodstanden er proportional med og modsat rettet hastigheden v , $F_{\text{gn}} = -\alpha v$.

$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= -k \cdot x + F_{\text{gn}} && \Leftrightarrow \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\alpha \frac{dx}{dt} - kx && \Leftrightarrow \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x &= 0 && (3.1) \end{aligned}$$

Vi omskriver ligningen til en mere generel form:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c \cdot x = 0 \quad (3.2)$$

hvor $b = \frac{\alpha}{m}$ og $c = \frac{k}{m}$

Når ligningen løses på traditionel vis, er metoderne lidt forskellige. Den metode, jeg anvender, er i familie med den, der bruges, når man løser 1. ordens differentialligninger.

Man tager udgangspunkt i en differentialligning, som vi kan løse, nemlig differentialligningen for den harmoniske svingning

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \Leftrightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0 \quad (3.3)$$

Herefter indfører man hjælpefunktionen $y = x e^{\beta t}$, hvor x er løsning til den oprindelige ligning (3.2), og hvor y er løsning (3.3). Vi sætter $\gamma = \frac{k}{m}$:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \cdot y = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 (x \cdot e^{\beta t})}{dt^2} + \gamma \cdot x \cdot e^{\beta t} = 0$$

Formålet er at omforme denne ligning til den oprindelige ligning

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c \cdot x = 0$$

ved et passende valg af konstanterne β og γ . Vi udregner derfor

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (x \cdot e^{\beta t})}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \cdot e^{\beta t} + x \cdot \beta \cdot e^{\beta t} \right) \\ &= \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot e^{\beta t} + \frac{dx}{dt} \cdot \beta \cdot e^{\beta t} + \frac{dx}{dt} \cdot \beta \cdot e^{\beta t} + x \cdot \beta^2 \cdot e^{\beta t} \\ &= \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot e^{\beta t} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{dx}{dt} \cdot e^{\beta t} + x \cdot \beta^2 \cdot e^{\beta t} \end{aligned}$$

Vi tilføjer leddet $\gamma \cdot x \cdot e^{\beta t}$, og sætter resultatet lig med nul.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (x \cdot e^{\beta t})}{dt^2} + \gamma \cdot x \cdot e^{\beta t} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot e^{\beta t} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{dx}{dt} \cdot e^{\beta t} + x \cdot \beta^2 \cdot e^{\beta t} + \gamma \cdot x \cdot e^{\beta t} &= 0 \quad (3.4) \end{aligned}$$

Ligningen reduceres ved division med $e^{\beta t}$ til

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{dx}{dt} + (\beta^2 + \gamma) \cdot x = 0 \quad (3.5)$$

Dette sammenlignes da med den oprindelige differentialligning (3.2)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c \cdot x = 0$$

og man ser, at de to differentialligninger er identiske, hvis og kun hvis

$$\beta = \frac{b}{2} = \frac{\alpha}{2m} \quad \text{og} \quad \beta^2 + \gamma = c \Leftrightarrow$$

$$\gamma = c - \frac{b^2}{4} \Rightarrow \gamma = \frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m}$$

Vi kan imidlertid løse (3.4) direkte. Sætter vi $y = x \cdot e^{\beta t}$, er differentialligningen af formen

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \cdot y = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -\gamma \cdot y \quad (3.7)$$

Hvis $\gamma > 0$, har differentialligningen (3.7) løsningen

$$y = A \cos(\sqrt{\gamma} \cdot t + \phi_0)$$

så vi finder

$$\begin{aligned} y &= x \cdot e^{\beta t} = A \cos(\sqrt{\gamma} \cdot t + \phi_0) \Leftrightarrow \\ x &= A \cdot e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\gamma} \cdot t + \phi_0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

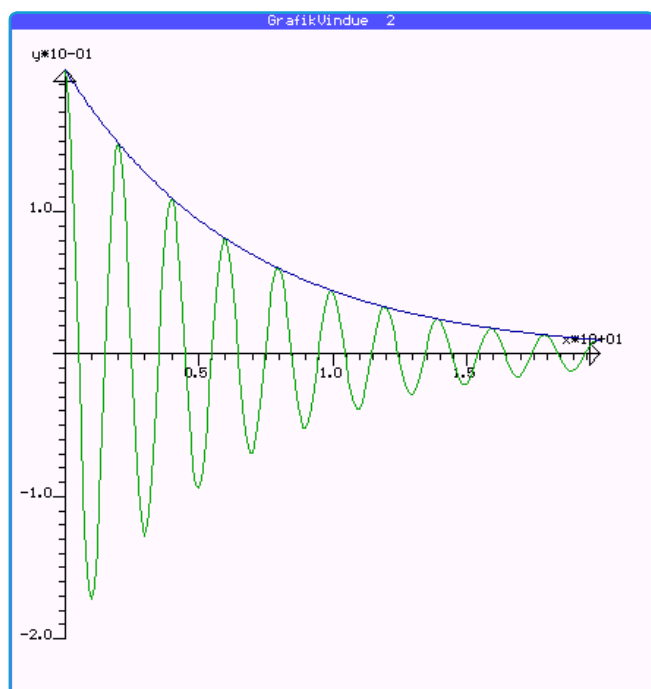
Tilbagefører vi nu fra den oprindelige differentialligning, hvor

$$\beta = \frac{\alpha}{2m} \quad \text{og} \quad \gamma = \frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2} \quad \text{fås:}$$

$$x(t) = A \cdot e^{-\frac{\alpha}{2m} t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}} \cdot t + \phi_0\right) \quad (3.9)$$

Vi finder altså en harmonisk svingning med en eksponentielt aftagende amplitude.

Nedenfor er vist grafen for en numerisk løsning af differentialligningen. Den eksponentielle indhyldningskurve er også tegnet. I det anvendte program hedder 1. akse altid x og 2. akse altid y . Det skal naturligvis forstås som t og x .



4. Dæmpning proportional med v^2

Hvis gnidningskraften er proportional med v^2 , så $F_{gn} = \eta v^2$, kan differentialligningerne godt løses for en retlinet bevægelse, (som jeg har vist i et tidligere indlæg), men man kan ikke løse ligningerne analytisk for en periodisk bevægelse.

Differentialligningen er i dette tilfælde:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\eta}{m} \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| + \frac{k}{m} x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{\eta}{m} \dot{x} |\dot{x}| + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{eller}$$

$$y'' + \frac{\eta}{m} y' |y'| + \frac{k}{m} y = 0$$

Ligesom i det første tilfælde, skal ligningen løses for $v > 0$ eller $v < 0$, men den kan ikke løses analytisk (så vidt jeg ved). Problemet er naturligvis det ikke-lineære led \dot{x}^2 .

Ligningen kan naturligvis løses numerisk, og resultatet er vist nedenfor. Det ses, at dæmpningen er størst i begyndelsen, men den forsvinder næsten for små hastigheder.

