Den kuriøse corioliskraft

OLE WITT-HANSEN, Køge Gymnasium

Er det en skrøne, at strømhvirvler altid bevæger sig med uret på den nordlige halvkugle og mod uret på den sydlige som en konsekvens corioliskraften?

Mens det er vanskeligt at hævde, at fysik C stiller de store faglige krav til eleverne, så stiller fysikundervisningen efter reformen ind imellem ganske betydelige krav til de fysiklærere, der fastholder, at de selv vil forstå, det som de underviser i – ud over de meget overfladiske forklaringer, der findes i de eksisterende lærebøger.

Jeg har talrige eksempler af øse af, lige fra ørets og øjets fysiologi, som jeg sidst stiftede bekendtskab med i gymnasiet gennem August Krogh og Brandt Rehbergs glimrende *Mennesket fysiologi*, over naturgeografi til statistikker om Danmarks energiforsyning, som engang hørte til samfundsfag.

Blæser vinden langs isobarer?

Det er svært at undgå, at man engang imellem bliver underløbet af ens egen uvidenhed, når man konfronteres med komplicerede problemstillinger indenfor fysiologi, naturgeografi og moderne teknologi. Det skete således mere end en gang, da jeg var censor i fysik C i juni måned.

I et af spørgsmålene, var der nævnt begrebet trykudligning. Altså ikke noget med Daltons lov og partialtryk, men kort og godt trykudligning. Eleven fik som bilag et vejrkort med isobarer. Eleven skulle så gøre rede for, hvilken vej vinden blæste, og det var jo nemt nok. Jeg lærte i geografitimerne i folkeskolen, at vinde blæser fra højtryk mod lavtryk. Eleven svarede imidlertid lidt overraskende, at vinden blæste langs med isobarerne, med uret på den nordlige halvkugle og mod uret på den sydlige.

Jeg skal ikke anfægte, at det muligvis er rigtigt, men den fysiske forklaring med trykudligning er jo ikke så god i den sammenhæng, da isobarerne netop er kurver gennem steder med samme tryk. Selvfølgelig skal eleverne ikke trækkes i karakter på grund af censors uvidenhed, og svaret blev da også accepteret som korrekt.

Det, som irriterede mig lidt, var nu den gamle skrøne om, at strømhvirvler altid bevæger sig med uret på den nordlige halvkugle og mod uret på den sydlige, og hvor forklaringen på dette angiveligt skulle være corioliskraften.

Hvad angår nordøst-passaten og sydøst-passaten, som blæser fra de subtropiske højtryk mod kalmebæltet omkring ækvator, så behøver man ikke at inddrage corioliskraften for at forklare dette. Jordens vinkelhastighed er

$$\omega_{\text{jord}} = \frac{2\pi}{T_{\text{jord}}} = \frac{2\pi}{24\ \text{h}} = 7{,}27\cdot 10^{-5}\ \text{s}.$$

Udregner vi hastigheden i cirkelbevægelsen nær ækvator, og hastigheden ved den 20. breddegrad, finder man.

$$v_0 = \omega_{\text{jord}}\cdot r_{\text{jord}} = 7{,}27\cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1}\cdot 6{,}370\cdot 10^{6}\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}} = 463\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{20} = \omega_{\text{jord}}\cdot r_{\text{jord}}\cos(20°) = 435\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

Medføringshastigheden af atmosfæren langs en breddegrad, er mindre ved 20. grad end ved ækvator.

Hvis vinden yderligere har en hastighed langs en meridian, vil vinden følgelig afbøjes modsat Jordens rotation, altså mod vest, hvilket vil opfattes, som om vinden blæser fra nordøst på den nordlige og sydøst på den sydlige halvkugle.

Forsøger man at udregne afbøjningsvinklen som følge af Jordens rotation, hvor man ser bort fra viskositet, hvilket man naturligvis ikke kan, så får man et lidt overraskende resultat.

Man kan få en skønsmæssig værdi for afbøjningsvinklen, hvis man antager at passatvinden langs en meridian er 6,0 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Betegnes vindhastigheden med v, og jordradius med R, og $\Delta s_1 = v\cdot\Delta t$ er det stykke, vinden bevæger sig i tiden Δt, svarer dette til en tilvækst i bredde $\Delta b = \frac{\Delta s_1}{R}$.

Den forskydning langs en bredde, som Jorden får ved bredderne b og $b + \Delta b$, kan udregnes som forskellen i hastighed gange Δt.

$$\begin{aligned}\Delta s_2 &= v_{b+\Delta b}\,\Delta t - v_b\,\Delta t = \omega\,(r_{b+\Delta b} - r_b)\Delta t\\ &= \omega R\,(\cos(b+\Delta b) - \cos(b))\,\Delta t\\ &\approx -\,\omega R\cdot\sin(b)\,\Delta b\,\Delta t\end{aligned}$$

Den vinkel, som vinden vil danne med en meridian, der følger med Jordens rotation, er da givet ved

$$\tan(\beta) = \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} = \frac{\omega R \cdot \sin(b)\, \Delta b\, \Delta t}{v\, \Delta t} = \frac{\omega R \cdot \sin(b)}{v} \Delta b$$

Indsættes $R = 6{,}370 \cdot 10^6$ m, $v = 6{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\omega = \omega_{\text{jord}} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$, $b = 20°$ og $\Delta b = 1° = \frac{\pi}{180}$, så finder man lidt overraskende $\beta = 24{,}7°$.

Regnestykket illustrerer blot, at det er fuldstændig urealistisk at se bort fra luftens viskositet.

Set udefra i rummet (fra et inertialsystem), er det relativt let at forstå bevægelserne på Jorden. Det er lidt mere kompliceret at analysere bevægelsen, set fra et roterende koordinatsystem, hvor man må inddrage de fiktive kræfter, som er centrifugalkraften og corioliskraften.

Centrifugalkraften er lettest at forstå. Bevæger man sig en jævn cirkelbevægelse, kræves der en centripetalkraft, som har størrelsen: $F_c = \frac{m \cdot v^2}{r}$. Når man følger med rotationen, vil dette "opleves" som tilstedeværelsen af en (centrifugal)kraft, af samme størrelse, men modsat rettet. Corioliskraften fremkommer derimod, når man bevæger sig i forhold til det roterende koordinatsystem.

Corioliskraften "ifølge Feynmann"

En helt generel udledning af udtrykket for corioliskraften kan man f.eks. finde i Landau og Lifschitz: *Mechanics* fra 1962. Udtrykket opnås dog ved at opstille et totalt differential af Lagrange funktionen under anvendelse af nogle sætninger fra den analytiske mekanik. Noget lettere tilgængeligt er en mere direkte udledning, som findes i Feynmann *Lectures* I (1963), hvor han dog kun regner skalært.

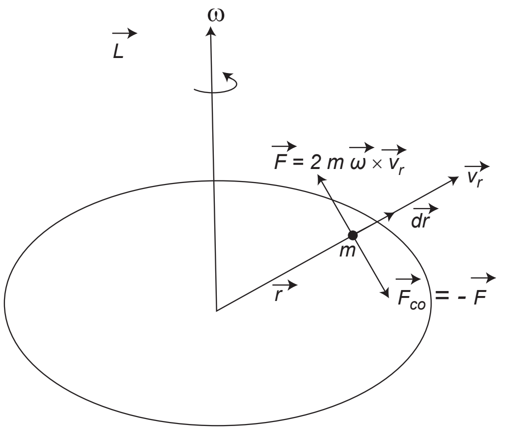
Vi forestiller os et system, der bevæger sig med konstant vinkelhastighed.

En massedel m med stedvektoren $\vec{r}$ har et impulsmoment: $\vec{L} = m\, \vec{r} \times \vec{v}$. Idet $\vec{r} \perp \vec{v}$ gælder, at $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Skalært: $v = \omega \cdot r$ og $L = m \cdot r \cdot v$.

Radial bevægelse

Vi ser først på det tilfælde, hvor massen m bevæger sig radialt, relativt til den jævne cirkelbevægelse. Her er: $L = m \cdot r \cdot v = m \cdot \omega \cdot r^2$. Ved differentiation finder man:

$$\frac{dL}{dt} = 2m\omega r \cdot \frac{dr}{dt} = r \cdot 2m\omega v_r$$



Figur 1

Idet $\vec{dr}$ har den samme retning eller modsat retning som $\vec{r}$, vil $\vec{dL}/dt$ være ensrettet med eller modsat rettet $\vec{L}$.

Ifølge kraftmomentsætningen:

$$\vec{H} = \frac{\vec{dL}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F},$$

vil partiklen være påvirket af et kraftmoment, som har størrelsen $r \cdot 2m\omega v_r$, og som har samme retning som $\vec{dL}/dt$. Tager man retningen af $\vec{r}$, $\vec{\omega}$ og $\vec{v}_r$ i betragtning, ses det, at partiklen vil være påvirket af en kraft $\vec{F} = 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$. Den fiktive kraft, som opleves af en, som følger med rotationen er da corioliskraften: $\vec{F}_{\text{co}} = -\vec{F}$.

$$\vec{F} = 2m\, \vec{v}_{\text{r}} \times \vec{\omega}.$$

Som vist på figur 1 vil et legeme påvirkes af en fiktiv sideværts kraft, som er modsat rettet cirkelbevægelsen, når man bevæger sig radialt ud, og modsat, når man bevæger sig ind mod centrum. Bemærk, at den fiktive kraft kun afhænger af den relative hastighed, og at den er uafhængig af afstanden r fra centrum af cirkelbevægelsen.

Dette er ret almindelig kendt, men det er bemærkelsesværdigt, at man er påvirket af den samme corioliskraft, ligegyldig hvor og hvorledes, man bevæger sig i et roterende koordinatsystem, og at kraften i alle tilfælde er givet ved udtrykket ovenfor.

Tangentiel bevægelse

Vi ser dernæst på det tilfælde, hvor partiklen har en tangentiel hastighed $\vec{v}_t$ relativt til cirkelbevægelsen.

Hastigheden set fra et inertialsystem er derfor $\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}_t$. Den resulterende kraft er i dette system lig med centripetalkraften:

$$F_c = \frac{m\cdot v^2}{r},$$

hvor $v^2 = \vec{v}^2 = (\vec{v}_c + \vec{v}_t)^2 = v_c^2 + v_t^2 + 2\vec{v}_c\cdot\vec{v}_t$

De første to led vil – i det roterende koordinatsystem – give et bidrag til centrifugalkraften. Hvis $v_t << v_c$, vil det andet led være forsvindende. For at forstå bidraget fra det 3. led opskriver vi udtrykket for centripetalkraften på vektorform:

$$\vec{F}_c = -2m\frac{\vec{v}_c\cdot\vec{v}_t}{r^2}\vec{r}$$

Da $\vec{v}_c$ og $\vec{v}_t$ er ensrettede eller modsat rettede, og $v_c = \omega\cdot r$ finder vi, idet vi skriver: $\vec{r} = r\cdot\vec{e}_r$

$$\vec{F}_c = -2\,\frac{m\cdot\omega\cdot r\cdot v_t\cdot r}{r^2}\vec{e}_r = -2m\cdot\omega\cdot v_t\cdot\vec{e}_r$$

Idet $\vec{v}_t \perp \vec{r}$ og $\vec{v}_t \perp \vec{\omega}$, kan man se, at dette kan skrives på vektorform: $\vec{F}_c = -2m\vec{v}_t \times \vec{\omega}$. Den tilsvarende fiktive corioliskraft er derfor givet ved udtrykket

$$\vec{F}_{co} = 2m\vec{v}_t \times \vec{\omega}$$

hvilket er nøjagtig det samme udtryk, som udledt ovenfor for en radial bevægelse.

Det er herefter nemt at argumentere for, at udtrykket er gyldigt i alle tilfælde. Hastigheden kan nemlig altid opløses i 3 komposanter:

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}_t + \vec{v}_\omega.$$

Da udtrykket for corioliskraften er en vektorligning, og krydsproduktet er associativt mht. addition, vil krydsproduktet med $\vec{v}_\omega$ og $\vec{\omega}$ give nul, da de er parallelle.

Formel udledning af udtrykket for corioliskraften

Formlen for corioliskraften kan udledes lidt mere formelt, hvis vi direkte anvender udtrykket for impulsmomentet for en partikel $\vec{L} = m\,\vec{r} \times \vec{v}$. For en partikel, der følger med cirkelbevægelsen er $\vec{L}$ konstant, og dermed $\vec{dL}/dt = 0$. Et bidrag, hvor $\vec{dL}/dt \neq 0$, kan derfor kun hidrøre fra en bevægelse relativ til cirkelbevægelsen. Indsætter vi

Lavtrykssystem over Island. Det drejer mod uret på grund af ligevægten mellem corioliskraften og trykgradienten. Kilde:en.wikipedia.org/wiki/Coriolis_effect.

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ i udtrykket for $\vec{L}$, får man:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Dette differentieres:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt})$$

I almindelighed er krydsproduktet ikke associativt, men i dette tilfælde er $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ og $\vec{\omega} \perp \vec{dr}/dt$, så de to led ovenfor er samme vektor efter to ombytninger af faktorerne i det første udtryk. Endvidere er

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_c + \vec{v}_{rel}$$

og vi ved, at det kun er den relative hastighed, der kan give bidrag til $\vec{dL}/dt$.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 2m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}) = \vec{r} \times 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$$

Igen sammenlignes med kraftmomentsætningen:

$$\vec{H} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F},$$

hvoraf ses, at partiklen som følge af den relative bevægelse i forhold til rotationen vil være påvirket af en kraft $\vec{F} = 2\, m\, \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$, som giver anledning til den fiktive corioliskraft $\vec{F}_{co} = -\vec{F}$.

$$\vec{F}_{co} = 2\, m\, \vec{v}_{rel} \times \vec{\omega}$$

Dette er det samme udtryk, som vi før udledte på en mere direkte og anskuelig måde.

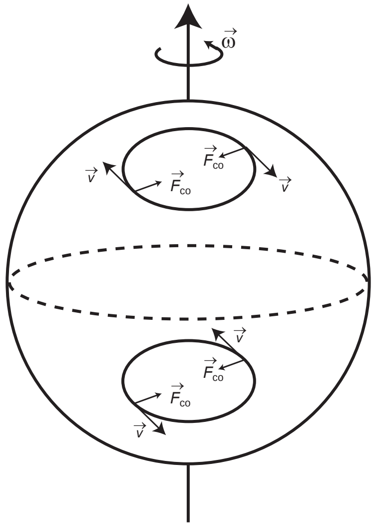
Om corioliskraften bemærker man, at den kun afhænger af den relative hastighed i forhold til det roterede system og vinkelhastigheden i rotationen. Den afhænger hverken af accelerationen eller af afstanden til rotationsaksen.

Retningen af corioliskraften er vinkelret på den relative hastighed og rotationsaksen, således at $\vec{v}_{rel}$, $\vec{\omega}$ og $\vec{F}_{co}$ danner en højreskrue. I et roterende koordinatsystem vil corioliskraften bevirke, at en partikel bliver afbøjet i en cirkel med uret.

Dette er søgt illustreret på figur 2 for bevægelser langs jordoverfladen.

Myten

Corioliskraften leverer naturligvis en forklaring på myten om, at strømhvirvler drejer med uret på den nordlige halvkugle, og mod uret på den sydlige, men ser man kvalitativt på det, er forklaringen alligevel tvivlsom, hvis det ikke drejer sig om meget store afstande.



Figur 2

Beregner vi F_{co} på massen 1 kg, som har en hastighed på 5,0 m/s, bliver resultatet:

$$F_{co} = 2 \cdot 1 \cdot 5{,}0 \cdot 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \text{N} = 7{,}27 \cdot 10^{-4}\ \text{N}$$

Altså knap 1 mN pr. kg. Umiddelbart er det vanskeligt at forestille sig, at en så ubetydelig kraft, skulle have indflydelse på turbulente bevægelser af viskose gasser eller væsker.

Der findes ingen særlig omfattende statistik omkring rotationsretningen af tornadoer, men mens de fleste rigtignok drejer med uret, så er der observeret flere, som drejer i den modsatte retning.

At tornadoerne dannes overhovedet, skyldes derfor næppe corioliskraften, men er nok snarere en konsekvens af impulsbevarelse, når en luftmasse bevæger sig i et rotationssymmetrisk kraftfelt.

Selv om myten om corioliskraftens årsag til strømhvirvler er forsøgt aflivet flere gange, bl.a. af professor Olaf Pedersen i udsendelserne "Spørg Århus" i slutningen af 60'erne, så lever den åbenbart videre i gymnasiets fysikpensum. ◊

Corioliskraften har navn efter den franske fysiker, Gaspard-Gustave Coriolis (1792-1843), som beskrev effekten i 1835. Matematikken bag optræder dog allerede i Pierre-Simon Laplaces tidevandsligning i 1778.