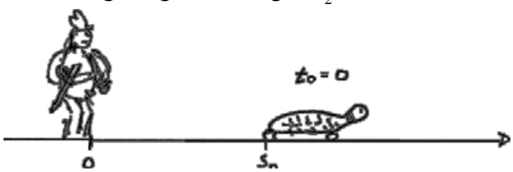
Achilleus og skildpadden

Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium

Efter 1988-reformen, hvor man i højere grad inddrog historisk matematik, er det klassiske paradoks om Achilleus og skildpadden ofte omtalt i lærebøgerne. Her følger den definitive forklaring på et (ikke) paradoks.

Jeg mener ikke at have set en eksakt gennemregning af eksemplet – hvilket imidlertid er meget let. Achilleus skal løbe om kap med skildpadden, som (rimeligt nok) får et forspring på s_0. Paradokset er, at Achilleus aldrig vil nå skildpadden, for når Achilleus er nået hen til s_0, vil skildpadden have bevæget sig stykket s_1. Før Achilleus kan indhente skildpadden skal han første bevæge sig strækningen s_1, men i den tid har skildpadden bevæget sig strækningen s_2. Da dette ræsonnement kan fortsættes ad infimum, vil Achilleus aldrig nå skildpadden!



Vi antager, at Achilleus' hastighed er c, og skildpaddens hastighed er u. Skildpadden har et forspring s_0 til tidspunktet $t_0 = 0$. Skildpaddens positioner betegnes 1, 2, 3…n. t_k er den tid, det tager Achilleus at løbe hen til det sted, hvor skildpadden var på positionen k-1. Vi finder således $t_1 = \frac{s_0}{c}$.

I dette tidsrum har skildpadden bevæget sig stykket $s_1 = u \cdot t_1$ og vi finder dernæst:

$$t_2 = \frac{s_1}{c} = \frac{u \cdot t_1}{c} = \frac{s_0}{c} \cdot \frac{u}{c}$$

På helt tilsvarende vis:

$$t_3 = \frac{s_2}{c} = \frac{u \cdot t_2}{c} = \frac{s_0}{c} \cdot \left(\frac{u}{c}\right)^2$$

Og helt generelt:

$$t_{k+1} = \frac{s_k}{c} = \frac{u \cdot t_k}{c} = \frac{s_0}{c} \cdot \left(\frac{u}{c}\right)^k$$

For at finde den samlede tid, der forløber før Achilleus når skildpadden i uendelig mange skridt, skal vi udregne den uendelige sum:

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} t_k = \sum_{k=0}^{\infty} t_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_0}{c}\left(\frac{u}{c}\right)^k = \frac{s_0}{c}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{u}{c}\right)^k$$

Den sidste række er en uendelig kvotientrække med kvotienten $k = \frac{u}{c}$ og første led $a_0 = \frac{s_0}{c}$. For en sådan række gælder sumformlen:

$$s = a_0 \cdot \frac{1}{1-k}$$

Anvendes dette i udtrykket ovenfor får man:

$$t = \sum_{k=0}^{\infty} t_{k+1} = \frac{s_0}{c}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{u}{c}\right)^k = \frac{s_0}{c}\,\frac{1}{1-\frac{u}{c}} = \frac{s_0}{c-u}$$

Det sidste resultat er meget let at fortolke, idet det udtrykker, at den tid, det tager for Achilleus at indhente skildpadden, er deres oprindelige afstand s_0 divideret med deres relative hastighed c-u. ◊