Vindmølle fysik

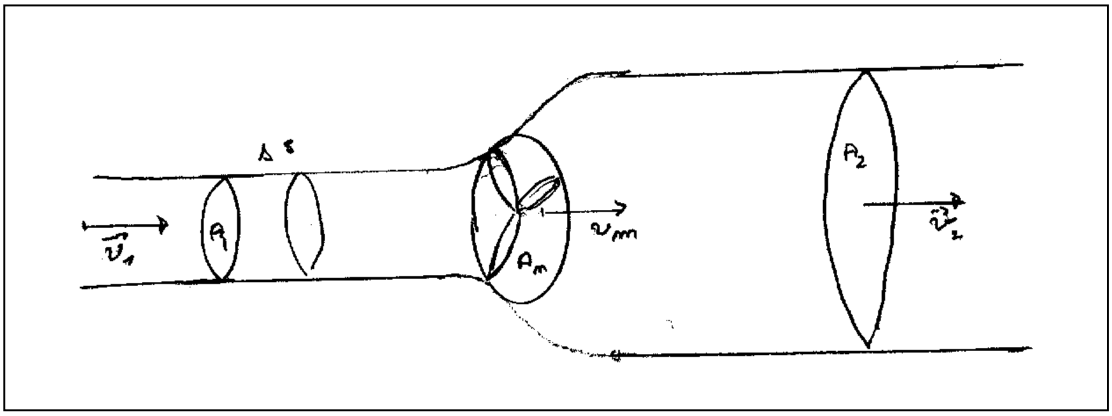
Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk

Ole Witt-Hansen

2019

Indhold

1. Analyse af et vindrør



Formålet med denne artikel er kun at bestemme den maksimale teoretiske effekt, som en vindmølle kan yde.
I praksis afhænger ydelsen imidlertid af møllens design og ingeniørmæssige konstruktion. Dette er imidlertid et meget omfattende område, som bygger på mere end 50 års erfaringer, noget vi slet ikke vil komme ind på her. (f.eks. forskellen på modstandsmøller og opdriftsmøller).

1.1 Stationær strømning

En stationær strømning er karakteriseret ved, at selv om væsken eller gassen er i bevægelse, så er hastigheden af en væske- eller gas partikel den samme på ethvert sted til ethvert tidspunkt.

I det følgende skal vi hovedsagelig anvende differentielle tilvækster, som for eksempel ds eller dt i stedet for endelige tilvækster Δs and Δt, noget som også automatisk gør $\frac{ds}{dt}$ til en differential-kvotient.

Vi skal begynde med at udlede *kontinuitetsligningen* for en stationær strømning, som i dette tilfælde indebærer det samme som massebevarelse.

Vi ser derfor på en strømning gennem et rør med varierende tværsnit. Ved en stationær strømning vil den masse af væske eller gas, der strømmer igennem et tværsnit med areal A med tykkelse ds, densitet ρ, hastighed v i tiden dt være den samme i to vilkårlige positioner af røret (1) og (2).

$$dm_1 = \rho_1 ds_1 A_1 = \rho_1 v_1 A_1 dt \quad \text{og} \quad dm_2 = \rho_2 ds_2 A_2 = \rho_2 v_2 A_2 dt$$

(1.1) $$\rho_1 v_1 A_1 dt = \rho_2 v_2 A_2 dt \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

Eller, hvis densiteten er den samme:

(1.2) $$\rho v A = \text{konstant} \qquad \text{(Ved ethvert tværsnit af røret)}$$

I det følgende skal vi derfor antage at densiteten af luften er konstant, hvilket nok ikke er helt indlysende for en gas, der bevæger sig gennem luftrør med forskellig diameter.
Ifølge tilstandsligningen for ideale gasser, har vi:

$$PV = n_M RT$$

Antallet af mol i en gas er lig med massen divideret med molmassen: $n_M = \frac{m}{M}$, og densiteten er massen divideret med rumfanget: $\rho = \frac{m}{V}$, så der gælder at: $n_M = \frac{\rho V}{M}$.

Tilstandsligningen bliver da:

$$PV = \frac{\rho V}{M} RT \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{PM}{RT}.$$

Hvis både trykket af gassen og temperaturen er konstant, kan vi med rimelighed antage at det samme gælder for densiteten ρ, hvilket vi vil antage i det følgende. Mindre afvigelser fra dette vil i alle tilfælde ikke influere på de grundlæggende resultater.

2. Et udtryk for den teoretiske effektivitet af en vindmølle

Idet vinden i vindrøret må fortsætte, (men med mindre hastighed og et større tværsnit af vindrøret), er det ikke muligt, at få overført al vindes energi i vindrøret til vindmøllen.

I alle tilfælde finder vi for den masse *dm*, der passerer gennem et tværsnitsareal *A*.

(2.1) $$dm = \rho v A dt, \quad \text{og derfor} \quad \frac{dm}{dt} = \rho v A$$

For impulsen og den kinetiske energi af massen *dm* med hastigheden *v*, har vi de to udtryk:

(2.2) $$p = (dm)v = \rho A v^2 dt \quad \text{og} \quad dE = \tfrac{1}{2}(dm)v^2$$

Og udtrykket for effekten bliver: $$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}v^2$$

Indsættes udtrykket for *dm/dt*, i dette udtryk får vi:

(2.3) $$P = \frac{dE}{dt} = \tfrac{1}{2}\rho v A v^2 = \tfrac{1}{2}\rho v^3 A$$

Vi noterer at vindens effekt er proportional med vindhastigheden i tredje potens.

Vi betragter nu tre forskellige tværsnit af luftrøret, svarende, svarende til (1), som er foran møllen, (2), som er ved møllen og (3), som er efter møllen. $(A_1, v_1), (A_m, v_m), (A_2, v_2)$. Se figuren ovenfor.

Den effekt P_m som bliver overført til møllen er lig med kraften på møllen F_m gange hastigheden af vinden på møllen.

(2.4) $$P_m = F_m v_m$$

Den effekt, som vinden overfører til møllevingerne, som overstryger arealet A_m er:

(2.5) $$P_1 = \tfrac{1}{2}\rho {v_1}^3 A_m$$

Da mølleeffekten betegnes P_m, definerer vi nu møllens effektivitet som:

(2.6) $$\varepsilon_{mølle} = \frac{P_m}{P_1} = \frac{F_m v_m}{P_1} \quad => \quad \varepsilon_{mølle} = \frac{F_m v_m}{\frac{1}{2}\rho {v_1}^3 A_m}$$

Kraften på møllen F_m , er lig med minus ændringen per tidsenhed af vindens impuls.

(2.7) $$F_m = \frac{\Delta p_m}{\Delta t} = \frac{p_1 - p_2}{\Delta t} = \frac{\Delta m v_1 - \Delta m v_2}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}(v_1 - v_2) \quad \text{hvor} \quad \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho v_m A_m$$

Hvis vi antager, at der ikke er noget tab af energi til termisk energi, er effekten imidlertid også lig med ændringen af vindens kinetiske energi af per tidsenhed.
Vi anvender arbejdssætningen for et gnidningsfrit system.

Det udførte arbejde på et system er lig med tilvæksten i kinetisk energi.

$$\frac{\Delta E_{kin}}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta t}({v_1}^2 - {v_2}^2)$$

Sammenholder vi denne ligning med: $F_m v_m = \frac{\Delta p_m}{\Delta t} v_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}(v_1 - v_2)v_m$ finder vi:

(2.8) $$\tfrac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta t}({v_1}^2 - {v_2}^2) = \frac{\Delta m}{\Delta t}(v_1 - v_2)v_m \quad => \quad v_m = \tfrac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

Dette udtryk for vindens hastighed på møllens plads, tillader os således at opstille et udtryk for mølleeffektiviteten.

(2.9)
$$\varepsilon_{mølle} = \frac{F_m v_m}{\frac{1}{2}\rho {v_1}^3 A_m} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\frac{(v_1 - v_2)\frac{1}{2}(v_1 + v_2)}{\frac{1}{2}\rho {v_1}^3 A_m}$$
$$\varepsilon_{mølle} = \frac{\rho v_m A_m (v_1 - v_2)\frac{1}{2}(v_1 + v_2)}{\frac{1}{2}\rho {v_1}^3 A_m} = \frac{\rho \frac{1}{2} A_m (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)\frac{1}{2}(v_1 + v_2)}{\frac{1}{2}\rho {v_1}^3 A_m}$$
$$\varepsilon_{mølle} = \frac{\rho \frac{1}{2} A_m (v_1 - v_2)\frac{1}{2}(v_1 + v_2)^2}{\frac{1}{2}\rho {v_1}^3 A_m} = \frac{1}{2}\frac{(v_1 - v_2)(v_1 + v_2)^2}{{v_1}^3}$$

Sætter vi $x = \frac{v_2}{v_1}$, finder vi da, efter at vi har reduceret brøken med ${v_1}^3$.

(2.10) $$\varepsilon_{mill} = \tfrac{1}{2}(1+x)^2(1-x)$$

For at bestemme det teoretiske maksimum for effektiviteten $\varepsilon_{mølle}$ af en vindmølle, differentierer vi dette udtryk med hensyn til *x*.

$$\varepsilon_{mill}'(x) = \tfrac{1}{2}(2(1+x)(1-x) - (1+x)^2) = \tfrac{1}{2}(1+x)(2(1-x) - (1+x))$$

$$\varepsilon_{mill}'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = -1) \vee \quad x = \tfrac{1}{3}$$

Så vi finder, at den maksimale effektivitet opnås for $x = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{1}{3}$.

Indsætter vi denne værdi i udtrykket for $\varepsilon_{mølle} = \tfrac{1}{2}(1+x)^2(1-x)$ får vi:

$$\varepsilon_{mølle}(\max) = \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{3})^2(1-\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}\tfrac{16}{9}\tfrac{2}{3} = \tfrac{16}{27} = 0.59$$

Så ligegyldig, hvordan en mølle er konstrueret eller udformet, så er det kun (teoretisk) muligt at udnytte 59% af vindens energi.
Man skulle imidlertid forvente at effektiviteten i praksis vil være en del mindre, som det er tilfældet med alle mekaniske "motorer".

Lad os for eksempel antage, at vi har en mølle, hvor møllevingernes længde er 10 *m*. Dette svarer til et overstrøget areal af vingerne på $\pi r^2 = 100\pi \; m^2$. Luftens densitet nær jordens overflade er 1,29 kg/m^3.

Vi har vist, at møllen højst kan udnytte 1/3 af vindens energi, og ud fra udtrykket (2.5) har vi derfor:

$$P_m = \tfrac{1}{3} P_1 = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}\rho v_1^3 A_m)$$

Hvis vi antager at vindhastigheden er 10 *m/s*, finder vi:

$$P_m = 67{,}544\, W \approx 68\, kW \,.$$

Hvis møllevingerne derimod er 15 *m* , skal vi blot multiplicere resultatet med en faktor $1.5^2 = 2.25$ som giver:

$$P_m = 151{,}974\, W \approx 152\, kW$$

Hvis møllevingerne er 15 *m*, og vinden i stedet blæser med 15 m/s, så skal dette resultat ganges med $1.5^3 = 3.375$.

$$P_m = 512{,}914\, W \approx 513 kW$$

Dette kan vi så sammenligne med data fra en såkaldt "standard" to megawatt mølle 2*MW* under optimale omstændigheder, som er defineret ved at yde 2*MWh* på en time.
Referencen oplyser imidlertid hverken dimensionerne af en standard mølle eller hvad den optimale vindhastighed er: Vi kan kun slutte, at møllen må være betydelig større end det er tilfældet i de to første eksempler ovenfor.
Effekten af en 2*MW* mølle udregnes nemlig til:

$$\frac{2MWh}{3600s} = 556 kW$$