Varmepumpen

Eksempel på anvendelse af Termodynamikkens 1. og 2. hovedsætning

Indhold

Ole Witt-Hansen Køge Gymnasium 2010

1. Syrlig indledning om 2005 reformen (Kan overspringes)

I juni var jeg for første gang siden 1988 censor ved et A-niveau hold i fysik. Selvom jeg naturligvis er nogenlunde bekendt med indholdet af de nuværende lærebogssystemer i fysik, så var jeg alligevel overrasket over så langt det analytiske teoretiske aspekt af fysikundervisningen er trængt i baggrunden.

Jeg havde selv et B-niveau og et A-niveau til eksamen og prøvede for første gang den eksperimentelle eksamen.

Jeg har aldrig fattet, hvorfor man har indført en eksperimentel eksamen i fysik. Rent faglig didaktisk, mener jeg at eksperimentelt arbejde er uforeneligt med en eksamen, og jeg vil såmænd godt vædde en halv tønde spegesild på, at Danmark er det eneste land i verden, hvor man praktiserer den prøveform.

I 2004 overværede jeg pligtskyldig den daværende fagkonsulent med imperatorisk ydmyghed befale hvorledes faget fysik skulle formidles efter reformen. Men jo længere han talte, jo mere begyndte jeg at holde øje med udgangen i den forventning om to herrer i hvide kitler snart ville dukke op og føre ham tilbage til afdelingen.

Det er rigtigt, at den eksperimentelle del af eksamen har et afslappet og uhøjtideligt præg, men dermed er fordelene vist også udtømt.

Til de mest åbenlyse ulemper, hører maraton eksamener og usikker bedømmelser ved gruppeeksamen (som jeg troede var afskaffet), samt indøvede færdigheder til den enkelte øvelse eller mangel på samme.
At lærerens forberedelse til eksamen er blevet flere gange fordoblet med at opstille og afprøve øvelserne, fremskaffe relevante, men nytteløse bilag vejer heller ikke positivt i min bedømmelse af eksamensformen efter 2005.

Med den med 30 min eksamensform, vi havde før 1988, 15 min til et teori spørgsmål og 10 min til en øvelse, beskrevet ud fra en selvstændig rapport, har jeg aldrig oplevet at en elev fik en forkert karakter.

2. Varmepumpen anvendt i fysikundervisningen i gymnasiet

En af øvelser, jeg som censor blev præsenteret for, var varmepumpen. Lidt overraskende for mig, idet termodynamikken jo ikke er ganske ukompliceret, og fordi interessen for varmepumper til jordvarme er stilnet af efter at have været på sit højeste i kølvandet på halvfjerdsernes oliekriser.

Forsøget med varmepumpen krævede nu heller ikke andet end 1. hovedsætning, idet den varme Q_2, som tilføres den ene beholder er lig med den varme Q_1 som hentes fra den anden beholder, plus det arbejde A som varmepumpen udfører.

$$Q_2 = A + Q_1 \quad \text{Hvor effektiviteten beregnes som} \quad \eta = Q_2/A$$

Hvis man ser bort fra energitabet i varmepumpen, så er effektiviteten teoretisk altid større end 1.
Formålet med forsøget, var at bestemme effektiviteten ud fra temperaturkurverne, idet varme-

mængderne jo kan beregnes ud fra kalorimeterligningerne, hvor m_1 *og* m_2 er masserne af væske i de to kar.

$$Q_1 = -m_1 c \Delta T_1 \qquad \text{og} \qquad Q_2 = m_2 c \Delta T_2$$

Temperaturerne i de to beholdere blev dataopsamlet og ført ind i en computer, hvor de to kurver blev tegnet. (Desværre skete der et eller andet, så alle data blev mistet på et sent tidspunkt af forsøget. Noget som jeg godt vil anføre som et andet argument mod eksperimentel eksamen).
De temperaturkurver, som jeg nåede at se, så ud til at være lineære, men det fortalte fysiklæreren, at det var de ikke. Jeg savnede nu lidt en teoretisk begrundelse af de to temperaturkurver.
Da jeg tænkte over det senere, var det klart, at en teoretisk udledning kun er mulig ved en differentiel anvendelse af 2. hovedsætning, men så har vi jo passeret gymnasieniveauet med flere længder.

3. Teoretisk beskrivelse af varmepumpen ud fra 1. og 2. hovedsætning

Vi opskriver derfor 1. og 2. hovedsætning på differentiel form :

1. Hovedsætning: $dQ_2 = dA + dQ_1$
2. Hovedsætning: Entropien: $dS = dS_1 + dS_2$. Hvor $dS_1 = \dfrac{dQ_1}{T_1}$ *og* $dS_2 = \dfrac{dQ_2}{T_2}$

Det antages det, at processerne er reversible – og det bliver vi nødt til at antage, hvis vi vil udlede noget som helst. Reversibilitet betyder at $dS = 0$. Der vil derfor gælde:

$$dS = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dS_1 + dS_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0$$

Her kan vi så indsætte udtrykkene ovenfor for $dQ_1 = c\, m_1 dT_1$ og $dQ_2 = c\, m_2 dT_2$.

Vi kan uden egentlig indskrænkning antage at $m_1 = m_2 = m$, og ved at forkorte med $c{\cdot}m$, får man ligningen:

$$\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dT_1}{T_1} + \frac{dT_2}{T_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln T_1 + \ln T_1 = k_1 \quad \Leftrightarrow \quad T_1 T_2 = k$$

Vi finder som konsekvens af entropibevarelse det simple resultat, at T_1 og T_2 er omvendt proportionale.

For at anvende dette i 1. hovedsætning, bliver vi nødt til at have en sammenhæng mellem dT_1 og dT_2. Ud fra ligningen: $T_1 T_2 = k$ følger imidlertid:

$$T_1 = \frac{k}{T_2} \;\Rightarrow\; dT_1 = -\frac{k}{T_2^{\,2}}\, dT_2 \quad \text{og tilsvarende} \quad T_2 = \frac{k}{T_1} \;\Rightarrow\; dT_2 = -\frac{k}{T_1^{\,2}}\, dT_1$$

Indsættes det ene eller det andet udtryk 1. hovedsætning

$$dQ_2 = dA + dQ_1 \quad \Leftrightarrow \quad cm{\cdot}dT_2 = Pdt - cm{\cdot}dT_1,$$

(minustegnet fordi dT_1 er negativ), og hvor $dA = Pdt$, hvor P er varmepumpens effekt, finder man:

$$cm \cdot dT_2 - cm\frac{k}{T_2^{\,2}}dT_2 = Pdt \quad \Rightarrow \quad (1-\frac{k}{T_2^{\,2}})dT_2 = \frac{P}{cm}dt$$
$$cm \cdot dT_1 - cm\frac{k}{T_1^{\,2}}dT_1 = Pdt \quad \Rightarrow \quad (1-\frac{k}{T_1^{\,2}})dT_1 = \frac{P}{cm}dt$$

Tilsyneladende er der fuldstændig symmetri mellem de to ligninger, men $k = T_1T_2 = T_0^2$,
hvor T_0 er den fælles begyndelsestemperatur.
Hvis T_2 forøges blot en lille smule, vil T_1 formindskes tilsvarende, ifølge relationen $k = T_1T_2 = T_0^2$,
så $T_2^2 > k$, mens $T_1^2 < k$.

De to faktorer i parenteserne vil derfor få forskelligt fortegn så T_1 vil aftage mens T_2 vil vokse.
Begge ligninger lader sig nemt integrere til at give:

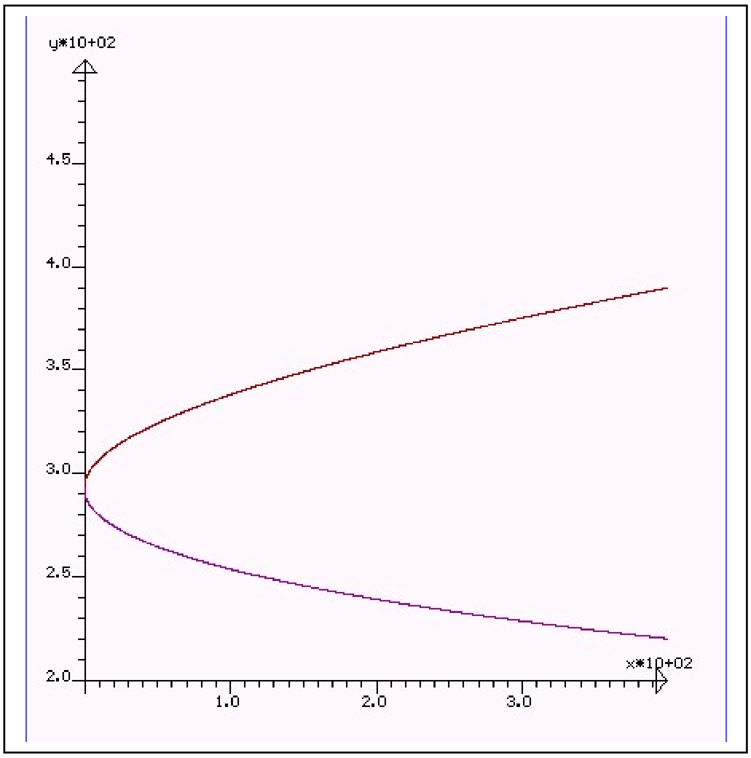
$$T_2 - T_{20} + \frac{k}{T_2} - \frac{k}{T_{20}} = \frac{P}{cm}t \qquad \text{og} \qquad T_1 - T_{10} + \frac{k}{T_1} - \frac{k}{T_{10}} = \frac{P}{cm}t$$

Ganger man den første ligning igennem med T_2T_{20} fremkommer en 2.gradsligning, som efter reduktion bliver:

$$T_2^{\,2} - (T_{20} + \frac{k}{T_{20}}k + \frac{P}{cm}t)T_2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow T_2^{\,2} - qT_2 + k = 0\,;\;\; hvor \quad q = (T_{20} + \frac{k}{T_{20}}k + \frac{P}{cm}t)$$

Samt en helt tilsvarende ligning for T_1. Selv om løsningen af andengradsligningen er helt ligetil, er den ikke særlig anvendelig. Det letteste er faktisk, at løse differentialligningerne numerisk.

For begge beholdere med 2 liter vand og fælles begyndelsestemperatur på 20^0C bliver kurverne som vist nedenfor. Temperaturen i den ene beholder falder imidlertid hurtigt til under frysepunktet, så kurverne er ikke realistiske. For at få en mere realistisk beskrivelse, må vi antage at det ene reservoir er meget større end det andet. Dette modificerer dog ligningerne noget.



4. Ligningerne løst med forskellige masser i de to kar

Vi reformulere da ligningerne ovenfor en lille smule

$\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0$ og $dQ_1 = c\, m_1 dT_1$ og $dQ_2 = c\, m_2 dT_2$ =>

$$\frac{m_1 dT_1}{T_1} + \frac{m_2 dT_2}{T_2} = 0$$

Integrerer vi denne ligning finder man:

$$m_1 \ln T_1 + m_2 \ln T_2 = k \quad \Leftrightarrow \quad \ln T_1 + \tfrac{m_1}{m_2} \ln T_2 = k$$

Som fører til $T_1 T_2^{\beta} = k, \quad hvor \quad \beta = \frac{m_2}{m_1}$. Dette giver så til ligningerne:

$$T_1 = \frac{k}{T_2^{\beta}} \Rightarrow dT_1 = -\beta \frac{k}{T_2^{1+\beta}} dT_2 \qquad T_2^{\beta} = \frac{k}{T_1} \Rightarrow \beta T_2^{\beta-1} dT_2 = -\frac{k}{T_1^2} dT_1$$

$$dT_2 = -\frac{k}{\beta T_2^{\beta-1} T_1^2} dT_1 = -\frac{k}{\beta (T_2^{\beta} T_1) T_2^{-1} T_1} dT_1 = -\frac{kT_2}{\beta k T_1} dT_1 = -\frac{k(kT_1^{-1})^{\frac{1}{\beta}}}{\beta k T_1} dT_1$$

$$dT_2 = -\frac{(kT_1^{-1})^{\frac{1}{\beta}}}{\beta T_1} dT_1 = -\frac{k^{\frac{1}{\beta}}}{\beta T_1^{1+\frac{1}{\beta}}} dT_1 \qquad dT_2 = -\frac{\left(\frac{k}{T_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{\beta T_1} dT_1$$

Herefter kan man opstille differentialligningerne for de to temperaturkurver.

$cm_2 \cdot dT_2 + cm_1 \cdot dT_1 = Pdt$ =>

$$cm_2 \cdot dT_2 - cm_1 \frac{\beta k}{T_2^{\beta+1}} dT_2 = Pdt \Rightarrow$$

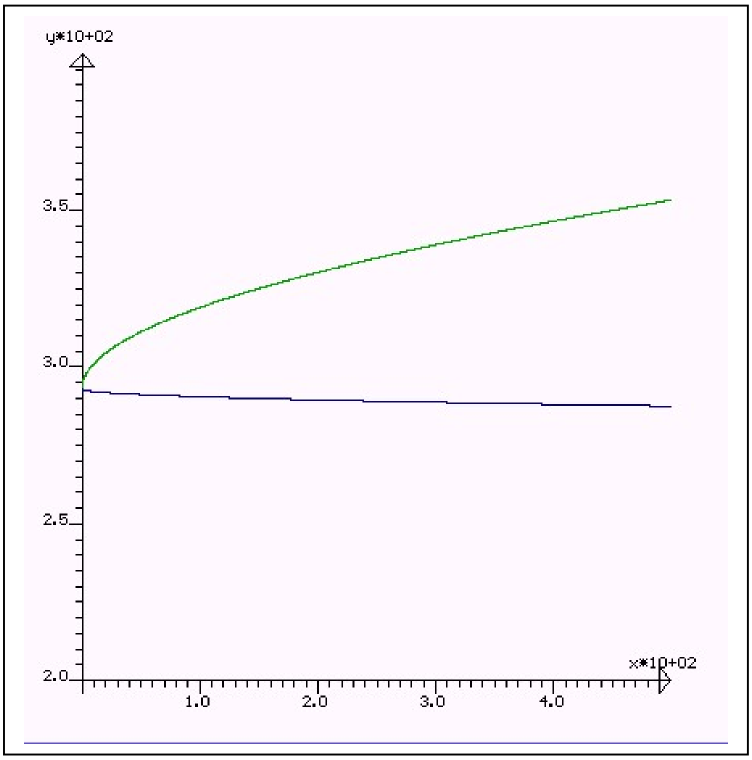
$$(1 - \frac{k}{T_2^{\beta+1}})\beta dT_2 = \frac{P}{cm_1} dt$$

$cm_1 \cdot dT_1 + cm_2 \cdot dT_2 = Pdt$ =>

$$cm_1 \cdot dT_1 - cm_2 \frac{\left(\frac{k}{T_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{\beta T_1} dT_1 = Pdt \Rightarrow$$

$$(1 - (\frac{k}{T_1})^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{T_1}) dT_1 = \frac{P}{cm_1} dt$$

I dette tilfælde er en eventuel analytisk løsning ikke særlig meningsfuld, så vi nøjes med en numerisk løsning. Sætter vi f.eks. $\beta = m_2/m_1 = 0.1$ fremkommer følgende kurver:



Og det ser jo ud til at være i den skønneste orden og i god overensstemmelse med de kurver jeg nåede at se fra forsøget.