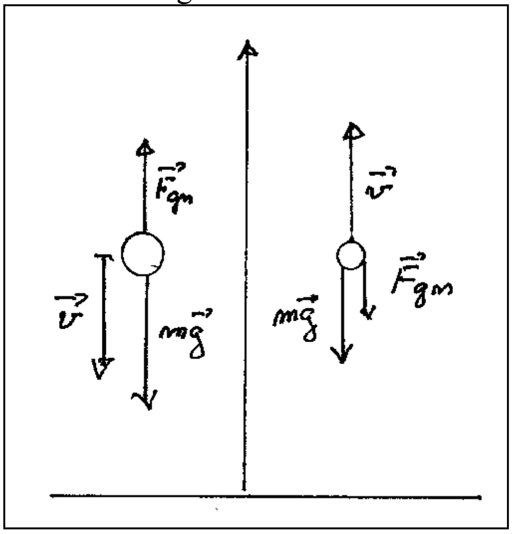
Turbulent bevægelse i væsker og gasser

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk

Ole Witt-Hansen 2008

4. Turbulent bevægelse i væsker og gasser

En del studieretningsrapporter beskæftiger sig med bevægelse med luftmodstand eller bevægelse i væsker. I de senere år har rapporterne været centreret på optagelse af bevægelserne med højhastighedskamera, fulgt af analyse af billederne med et computerprogram.
Med den nuværende matematik- og fysikundervisning i gymnasiet er en teoretisk indgang nok ikke særlig oplagt, men alligevel er det ikke uinteressant at kunne sammenligne med teori.
Jeg har haft meget svært ved at finde en teoretisk behandling af emnerne nedenfor, så jeg kan ikke henvise til nogen kilder.



Vi skal se på et legeme, der bevæger sig lodret i en væske eller luftart. Kun påvirket af tyngdekraften, opdriften og den gnidningsmodstand, som skyldes viskositet.
For væsker deler bevægelsesligningerne op, eftersom legemets massefylde er større end væskens (legemet synker) eller omvendt, så legemet bevæger sig op.
Gnidningsmodstanden er altid rettet modsat hastigheden, mens tyngdekraften altid er nedadrettet.
Vi anvender følgende udtryk semi-empiriske udtryk for gnidningskraften:

(4.8) $$F_{visc} = \tfrac{1}{2} c_w \rho A v^2$$

ρ er massefylden for væsken/luften, A er tværsnitsarealet for legemet, v er hastigheden og c_w er den såkaldte (dimensionsløse) formfaktor. For nemheds skyld sætter vi: $F_{visc} = cv^2$
En omtrentlig værdi for c_w kan findes i en tabel, f.eks. Databogen, hvor man også finder den kinematiske viskositet ν og den dynamiske viskositet η.
Sammenhængen mellem de to viskositeter, er den, at η= νρ.
c_w er angivet for forskellige udformninger af legemet og Reynoldstallet, som er defineret som:

(4.9) $$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot D}{\nu}$$

v (i tælleren) betegner hastigheden og ν i nævneren den kinematiske viskositet. D er den lineære udstrækning af legemet.
Det bemærkes, at bevægelsesligningerne nedenfor godt kan løses, hvis man i stedet anvender Stokes lov for gnidningsmodstanden er: $F_{stoke} = 6\pi\eta r v$, men det giver resultater, der for legemer med en diameter på nogle centimeter, og som vejer omk. 100 gram, som ikke er i overensstemmelse med erfaringen.

Hvis legemet bevæger sig op på grund af opdriften, vil det være påvirket af opdriften, samt tyngdekraften, og gnidningsmodstanden, som begge har samme retning:

(4.10) $$F_{res} = F_T + F_{op} + F_{visc} \quad \Leftrightarrow \quad ma = -mg + m_v g - cv^2$$

Hvis legemet derimod synker, gælder der, at legemet er påvirket af opdriften, samt tyngdekraften og gnidningsmodstanden, som nu er modsat rettede:

(4.11) $$F_{res} = F_T + F_{op} + F_{visc} \quad \Leftrightarrow \quad ma = -mg + m_v g + cv^2$$

m betegner massen af legemet, og m_v er den fortrængte væskemængde, ifølge Arkimedes lov.

4.2.1 Opadgående bevægelse:

(4.12) $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_v - m}{m} g - \frac{c}{m} v^2$$

Vi sætter $\mu = \dfrac{m_v - m}{m}$

(4.13) $$a = \frac{dv}{dt} = \mu g - \frac{c}{m} v^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \mu g \left(1 - \frac{c}{\mu g m} v^2\right)$$

Ligningen kan løses direkte ved separation af de to variable v og t, og lidt regne-regne, men man kan også gætte løsningen ved at bemærke, at $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$.

Sætter vi nemlig $k^2 = \dfrac{c}{\mu g m}$, antager ligningen formen:

(4.14) $$\frac{dv}{dt} = \mu g (1 - (kv)^2)$$

som ses at have løsningen:

(4.15) $$v = \frac{1}{k} \tanh(\mu g k t)$$

eller når man indsætter værdien for k:

(4.16) $$v = \sqrt{\frac{(m_v - m)g}{c}} \tanh \sqrt{\frac{c(m_v - m)g}{m^2}} t$$

tanh nærmer sig hurtigt asymptotisk til 1, f.eks. er tanh(1) = 0.76 og tanh(2) = 0.96.

Sluthastigheden bliver: $v = \dfrac{1}{k} = \sqrt{\dfrac{(m_v - m)g}{c}}$

hvilket også kan ses direkte, ved i (4.13) at sætte: $\dfrac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \mu g (1 - (kv)^2) = 0 \Leftrightarrow v = \dfrac{1}{k}$.

Tænker vi os f.eks. en badebold med diameter 0,30 m, så vil vi forsøge, at udregne den fart, hvormed den forlader overfladen, hvis den er holdt under vand. Man kan slå formfaktoren op i en tabel, og der finder man, at den for en kugle er $c_w = 0{,}2$.
For ovennævnte badebold giver dette værdien $c = 7{,}07$ kg/m.

(4.17) $$F_{visc} = \tfrac{1}{2} c_w \rho A v^2 = cv^2 .$$

Løser vi ligningen: $\sqrt{\frac{c(m_v - m)g}{m^2}}t = 2$,

som svarer til 96% af sluthastigheden, ses, at det drejer sig om brøkdele af et sekund, før den er opnået, så i eksemplerne nedenfor, kan vi anvende sluthastigheden. $v = \sqrt{\frac{(m_v - m)g}{c}} = 4{,}4\ m/s$.
Slippes en badebold, der er holdt under vand, vil den efter at have nået overfladen,
hoppe stykket $h = \frac{v^2}{2g} = 0{,}98\ m$.

For en bordtennisbold med radius 2 *cm*, og massen 3,0 *g* forløber regningerne således:

$$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{4 \cdot 0{,}04}{1{,}0 \cdot 10^{-6}} = 1{,}6\,10^7,$$

som giver formfaktoren:

$c_W = 0{,}2$. $A = \pi\,(0{,}02)^2\ m^2 = 1{,}26\ 10^{-3}$, $\rho = 10^3\ kg/m^3$. Heraf udregnes:

$c = \frac{1}{2}c_w \rho A = 0{,}1 \cdot 10^3 \cdot 1{,}26\ 10^{-3}\ kg/m = 0{,}126\ g/m$. $m_v = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = 0{,}0335\ kg$.

Sluthastigheden bliver: $v = \sqrt{\frac{(m_v - m)g}{c}} = \sqrt{\frac{0{,}0305 \cdot 9{,}82}{0{,}126}}\ m/s = 1{,}54\ m/s$

Med denne sluthastighed skulle bolden altså kunne hoppe et stykke: $h = \frac{v^2}{2g} = 0{,}12\ m$

4.2.2 Nedadgående bevægelse:

Vi ser nu på et legeme, der synker i vand: Bevægelsesligningen er:

$$F_{res} = F_T + F_{op} + F_{visc} \Leftrightarrow ma = -mg + m_v g + cv^2 \tag{4.18}$$

Forskellen fra før er blot, at massen af legemet $m > m_v$ (massen af den fortrængte væskemængde).
Bevægelsesligninger bliver den samme som før, bortset fra et minustegn:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_v - m}{m}g + \frac{c}{m}v^2 = -\frac{m - m_v}{m}g + \frac{c}{m}v^2 \tag{4.19}$$

Vi sætter $\mu = \frac{m - m_v}{m}$ og får da:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\mu g + \frac{c}{m}v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\mu g(1 - \frac{c}{\mu g m}v^2) \tag{4.20}$$

Ligningen har den samme løsning som før (bortset fra et minustegn)

Hvis vi som før sætter vi: $k^2 = \dfrac{c}{\mu g m}$, antager ligningen formen;

(4.21) $$\frac{dv}{dt} = -\mu g(1-(kv)^2)\,,$$

som ses at have løsningen:

(4.22) $$v = -\frac{1}{k}\tanh(\mu g k t) \quad <=> \quad v = -\sqrt{\frac{(m-m_v)g}{c}}\tanh\sqrt{\frac{c(m_v-m)g}{m^2}}t$$

Ser vi f.eks. på en jernkugle med radius 5 cm og massefylde ρ=7,8 10^3 kg/m^3 , finder man for c:
c = 0,79 (SI-enheder), $m_v = \rho_{vand}\, V_{kugle}$ = 1,0 10^3 ·4/3(5 10^{-2})^3 kg = 0,524 kg, og
$m = \rho_{jern}\, V_{kugle}$ = 7.8 10^3 4/3(5 10^{-2})^3 kg = 4,1 kg.
Heraf får man sluthastigheden:

$$v = -\sqrt{\frac{(m-m_v)g}{c}} = 6{,}7\ m/s = 24\ km/h$$

4.2.3 Lodret bevægelse i luft

For bevægelse i luft kan man i almindelighed se bort fra opdriften.
De to bevægelsesligninger bliver:

Bevægelse op: $$F_{res} = F_T + F_{luft} \;\Leftrightarrow\; ma = -mg - cv^2$$
(4.23)
Bevægelse ned: $$F_{res} = F_T + F_{luft} \;\Leftrightarrow\; ma = -mg + cv^2$$

Vi løser først for bevægelsen op:

(4.24) $$a = \frac{dv}{dt} = -g - \frac{c}{m}v^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{dv}{dt} = -g(1+\frac{c}{mg}v^2)$$

Vi sætter $k = \sqrt{\dfrac{c}{mg}}$ og får

(4.25) $$\frac{dv}{dt} = -g(1+(kv)^2)$$

Som før, kan ligningen løses ved separation af de to variable v og t, men det er lettere at bemærke, at $(\tan x)'$ =1+tan$^2 x$, og så gætte på en løsning af formen $v = -a\tan bt$.

$$\frac{dv}{dt} = -a(1+\tan^2 bt)b$$

Ved sammenligning med:

$$\frac{dv}{dt} = -g(1+(kv)^2)$$

ses at

$$\tan bt = kv \Rightarrow \quad v = \frac{1}{k}\tan bt, \quad så \quad a = -\frac{1}{k} \text{ og følgelig } ab = -g \quad \Rightarrow b = gk$$

Løsningen er derfor:

(4.26) $$v - v_0 = -\frac{1}{k}\tan(kgt) \quad \text{hvor} \quad k = \sqrt{\frac{c}{mg}} \quad \text{og} \quad c = \tfrac{1}{2}c_w \rho A$$

For $kgt << 1$ er $\tan(kgt) = kgt$, og formlen går over i $v = v_0 - gt$, som den burde.

For en bold med r = 0,05 *m* og masse m = 250 *g* er $c = 2{,}0\ 10^{-3}$ *kg/m* og k = 0,0285 *s/m*.
Hvis denne bold kastes op med en begyndelseshastighed på 5,0 *m/s*, kan vi bestemme tidspunktet, hvor den vender ved at løse ligningen: $v = 0 \Leftrightarrow \tan gkt = kv_0$, som giver: t = 0,51 *s*.
Hvis man vil finde, hvor langt den når op, skal man integrere ligningen ovenfor:

(4.27) $$s - s_0 = -\frac{1}{k^2 g}\ln(\cos(gkt))$$

Udregner man denne strækning, svarende til en begyndelseshastighed v_0 = 5,0 *m/s*, så er der kun en forskel på 2. decimal i forhold til et lodret kast uden luftmodstand.

Vi skal derefter se på et frit fald med luftmodstand:

$$F_{res} = F_T + F_{luft} \quad \Leftrightarrow \quad ma = -mg + cv^2 \qquad \text{som fører til ligningen:}$$

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{c}{m}v^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -g(1 - \frac{c}{mg}v^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -g(1-(kv)^2)$$

Hvor vi har sat $k^2 = \frac{c}{mg}$. Den sidste ligning har som vist ovenfor løsningen:

(4.28) $$v = -\frac{1}{k}\tanh(gkt)$$

Sluthastigheden er $v = -\frac{1}{k} = -\sqrt{\frac{mg}{c}}$

Indsættes værdierne for $c = 8{,}1\ 10^{-3}$, svarende til en kugle med r = 0,10 m, og massefylde $1{,}0\ 10^3$ *kg/m*^{3}, får man: v_{slut} =226 *m/s*.

Strækningen kan bestemmes ved at integrere hastigheden. Man får: $s - s_0 = \frac{1}{gk^2}\ln(\cosh(gkt)$

Sluthastigheden opnås omtrent når gkt =2, som giver $t = 1/gk$ = 46 s.
Dette vil svare til en strækning: $s - s_0$ = 5200 m.

Jeg kan ikke stå til ansvar for, hvorvidt ovenstående beregninger passer med virkeligheden. F.eks. er formfaktoren er kun fastlagt på nær en faktor 2.