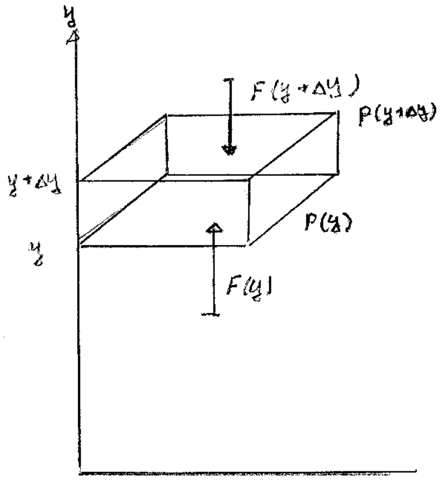
Trykkets afhængighed af højden over jordoverfladen

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk

Ole Witt-Hansen 2019

Trykkets afhængighed af højden over jordoverfladen



Vi betragter et kasseformet udsnit af atmosfæren. Arealet af endefladerne betegnes A. Kassen befinder sig i højden y over jordoverfladen.
Kassen har højden Δy. Trykket på overside og underside betegnes $p(y+\Delta y)$ og $p(y)$. Massefylden for luften i højden y betegnes $\rho(y)$.
Vi minder om at kraften på en flade med areal A er $F = pA$, hvor p er trykket på fladen.

Vi udtrykker nu, at forskellen i kraften på underside og overside er lig med tyngden af den luft, der befinder sig i kassen. Dette fordi luften i kassen er i hvile.

$$p(y)A - p(y+\Delta y)A = m_{air}g = \rho(y)V_{air}g = \rho(y)A\Delta yg$$

Så der gælder

$$p(y)A - p(y+\Delta y)A = \rho(y)A\Delta yg$$

Divideres med $A\Delta y$ fås:

$$\frac{p(y+\Delta y)-p(y)}{\Delta y} = -\rho(y)g$$

og erstattes

$$\frac{p(y+\Delta y)-p(y)}{\Delta y} \text{ med } \frac{dp}{dy} \text{ får man:}$$

(1.1)
$$\frac{dp}{dy} = -\rho(y)g$$

For at løse differentialligningen (1.1), må vi imidlertid kende endnu en sammenhæng mellem $\rho(y)$ og $p(y)$. Den kan vi imidlertid få af :

1. Tilstandsligningen for ideale gasser: $PV = nRT$
2. Definition af molmasse M: $m = nM \Leftrightarrow n = \frac{m}{M}$, hvor n er antal mol, samt
3. Definition af massefylde: $\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho V$

Indsættes nemlig de to sidste ligninger i tilstandsligningen finder man:

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT = \frac{\rho V}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{M}{RT}P$$

Dette udtryk for massefylden indsættes så i (1.1), som herefter giver:

(1.2) $$\frac{dp}{dy} = -\frac{Mg}{RT}p$$

Som bekendt aftager temperaturen ca. med 1°C for hver 200 m, man kommer til vejrs, men vi antager først, at temperaturen er konstant op igennem atmosfæren.

Løsningen til differentialligningen (1.2) er kendt, så vi finder:

(1.3) $$p(y) = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}y}$$

Indsættes værdier for konstanterne: M =29 g/mol, g = 9.82 m/s^2, R= 8.31 J/(molK) og T = 273 K, finder man:

(1.4) $$p(y) = p_0 e^{-1.26 10^{-4} y}$$

Hvor y skal måles i meter. Dette giver et trykfald på 1,3% pr. 100 m og 12% pr. 1000 m.

Vi ser dernæst på løsningen til differentialligningen, hvis temperaturen antages at aftage lineært med 1^0C, pr. 200 *m*. Temperaturen ved jordoverfladen sættes til 20 ^{0}C = 293 K.
Temperaturen i højden y er derfor: $T = T(y) = 293 - y/200$. Differentialligningen bliver herefter:

(1.5) $$\frac{dp}{dy} = -\frac{Mg}{R(293 - \frac{y}{200})}p$$

Denne ligning løses på sædvanlig vis ved separation og integration:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R}\int_0^y \frac{1}{293 - \frac{y}{200}}dy \qquad \int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{293R}\int_0^y \frac{1}{1-\beta y}dy \quad med \quad \beta = \frac{1}{293 \cdot 200}$$

Ligningen integreres til at give:

(1.6) $$\ln(\frac{p}{p_0}) = \frac{Mg}{293R\beta}\ln(1-\beta y) \quad \Rightarrow \quad p = p_0(1-\beta y)^{\frac{Mg}{293R\beta}}$$

Udregnes trykket efter (1.6) giver det kun anledning til afvigelser fra (1.4) på 0,1 – 0,2 %.