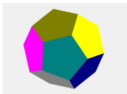
Om tømning af en beholder

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk



Ole Witt-Hansen 2019

Indhold

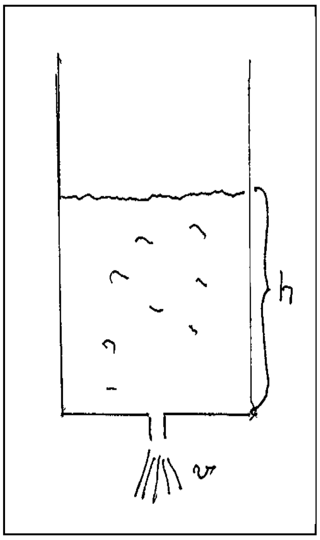
1. Indledning 1
2. Tømning af en beholder via en hane i bunden 1
3. Tømning af en beholder gennem en anden beholder 2
4. Tømning af en beholder, som ikke er en lodret cirkulær cylinder 3
4.1 Kegleformet beholder 3
4.2 Beholderen er en omvendt kegle 4
4.3 Når beholderen er en keglestub 5

1. Indledning

Som matematik og især fysiklærer, bliver man i forbindelse med Studieretningsprojekter ret hyppigt præsenteret for emner, som man ikke har det fjerneste begreb om, hvilket eleven selvsagt heller ikke har, men til gengæld har fundet emnet et eller andet sted på nettet, måske formidlet af de allestedsnærværende hittepåsomme ”videnskabsteori” hungrende reformpædagoger.
Hvis man søger efter et sådant emne, viser det sig ofte, at litteraturen enten er for overfladisk eller for avanceret teknisk, og (især efter reformen) ”ikke rigtig rammer gymnasieniveauet”. Det gælder f.eks. universitetslærebøger i matematik eller fysik.
Hvis eleven så har givet op efter en rundtur på nettet og biblioteker, og hvis det er et emne, som jeg nogen indsigt i, så jeg i flere tilfælde skrevet (eller genbrugt) et kompendium om emnet, som eleven har forholdt sig til. Jeg har som regel opnået gode karakterer for eleven, hvis de altså har fulgt mig.

I år var der en elev, (hvor jeg ganske vidst ikke var vejleder), men som havde valgt et emne med tømning af et kar gennem en studs i bunden. Et klassisk problem, som jeg ikke kunne finde løsningen på i nogen af mine (gamle) lærebøger.
Da jeg tidligere (i forbindelse med et AT-forløb) har skrevet et kompendium og strømning i væsker og gasser og Bernuillis lov, (hentet fra den udmærkede Hugh. D. Young: University Physics 1992. 2007 udgaven er mere omfangsrig - og langt ringere), så kunne jeg ikke lade være at regne på problemet. Udledningen følger nedenfor:

2. Tømning af en beholder via en hane i bunden



Vi betragter en beholder fyldt med viskositetsfri væske op til en højde h over udløbshanen (studsen) i bunden. Væsken har massefylden ρ, og *p* betegner trykket i højden *y*. Vi anvender Bernoullis lov:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho\, v_1{}^2 + \rho\, g\, y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho\, v_2{}^2 + \rho\, g\, y_2$$

Denne ligning udtrykker, at

(2.1) $p + \tfrac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho\, g\, y = konstant$ (langs en strømningslinie),

men vi udelader leddet med trykket, da vi antager at det *ydre* tryk er det samme på overfladen, som efter udløb af beholderen. Erstatter *y* med *h* til at betegne dybden er ligningen.

$$\tfrac{1}{2}\rho\, v_1{}^2 + \rho\, g\, h_1 = \tfrac{1}{2}\rho\, v_2{}^2 + \rho\, g\, h_2$$

Ved overfladen $h = 0$ er $v = 0$, og i dybden h er hastigheden v.

Herved giver Bernoullis lov det samme som gælder for et frit fald i tyngdefeltet:

$$\tfrac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho\, g(-h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

v er hastigheden, hvormed væsken løber ud af hanen.

Hvis massen af væsken i beholderen er $m = m(t)$, og hvis røret til hanen har tværsnitsarealet D, gælder der kontinuitetsligningen for den mængde væske dm, der i tidsrummet dt strømmer ud gennem hanen.

$$\frac{dm}{dt} = -\rho D v.$$ (Minustegnet fordi m aftager)

Hvis beholderens tværsnit er A, er samtidig $m = \rho A h$, så

$$\frac{dm}{dt} = \rho A \frac{dh}{dt}$$

Ved at sætte de to udtryk for $\frac{dm}{dt}$ lig med hinanden, finder man: $\rho A \frac{dh}{dt} = -\rho D v$ og indsættes udtrykket $v = \sqrt{2gh}$, får man en differentialigning for h.

(2.2) $$\rho A \frac{dh}{dt} = -\rho D \sqrt{2gh} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A}\sqrt{h}$$

Ligningen kan løses ved separation af de variable.

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A}dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{h_0}^{h} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A}\int_0^t dt \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{h} - 2\sqrt{h_0} = -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A}t \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \sqrt{2g}\,\frac{D}{2A}t \quad \Leftrightarrow$$

$$h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{D\sqrt{2g}}{2A}t\right)^2$$

Beholderen er tømt, når $h = 0$. Det sker ifølge ligningen ovenfor til tidspunktet: $t = \frac{A}{D}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

For en beholder med $A = 50 \times 50\ \text{cm}^2$ og $h_0 = 1{,}0\ m$, og $D = 2{,}0\ cm^2$.
Giver det en tid for tømning, som er 564 s.

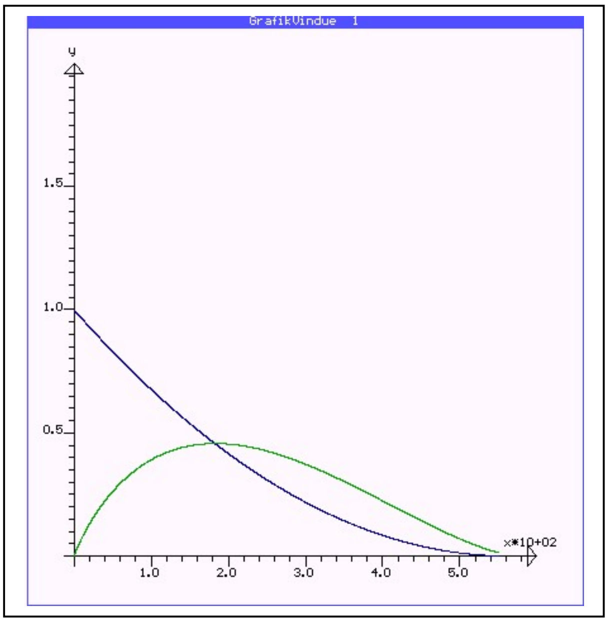
3. Tømning af en beholder gennem en anden beholder

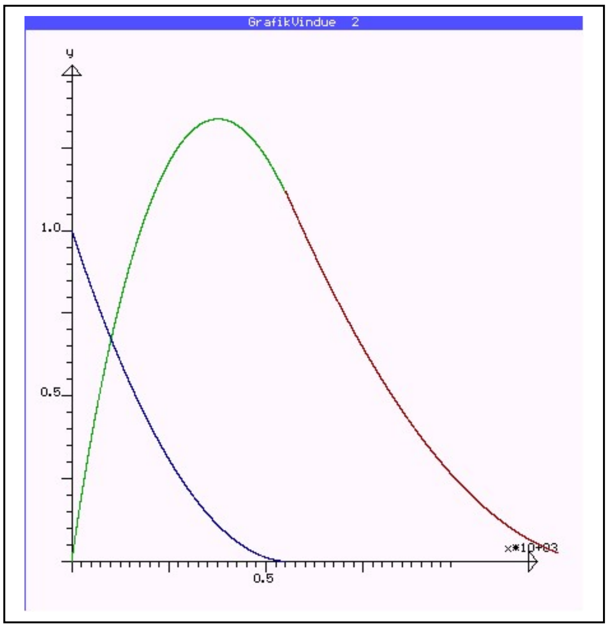
I den eksperimentelle del af SRP opgaven, betragtede eleven også den situation, at vand blev tømt fra et kar over i et andet kar, med en anden dimension og studs, hvilket fører til to koblede differentialligningen af første orden.
Da det er den samme mængde vand, som løber ud af det første kar og over i det andet, må der for rumfangene gælde: $dV_1 = dV_2 \Leftrightarrow A_1 dh_1 = A_2 dh_2$. Differentialligningen for det første kar er uændret den samme, og for det andet kar, skal vi blot tilføje et positivt bidrag fra det første kar.

$$\frac{dh_1}{dt} = -\sqrt{2g}\,\frac{D_1}{A_1}\sqrt{h_1} \quad og \quad \frac{dh_2}{dt} = \frac{A_1}{A_2}\frac{dh_1}{dt} - \sqrt{2g}\,\frac{D_2}{A_2}\sqrt{h_2}$$ som giver:

$$\frac{dh_1}{dt} = -\sqrt{2g}\,\frac{D_1}{A_1}\sqrt{h_1} \qquad og \qquad \frac{dh_2}{dt} = \sqrt{2g}\,\frac{D_1}{A_2}\sqrt{h_1} - \sqrt{2g}\,\frac{D_2}{A_2}\sqrt{h_2}$$

Det er ikke umiddelbart at løse differentialligningerne analytisk, men nedenfor er vist to numeriske løsninger. I begge tilfælde har det andet kar et mindre tværsnit, men i første tilfælde er udløbet med en større diameter og i det andet tilfælde en mindre. Den parabolske form er dog tydelig i begge tilfælde.
I figurerne nedenfor viser den ene af kurverne tømningen af den første beholder. Dette er uafhængig af den anden kurve. Den numeriske løsning af differentialligningen, ses at være i overensstemmelse med beregningen ovenfor.





4. Tømning af en beholder, som ikke er en lodret cirkulær cylinder

Som vist ovenfor fører tømning af en beholder til differentialligningen:

$$(4.1) \qquad \rho A\frac{dh}{dt} = -\rho D\sqrt{2gh} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A}\sqrt{h}$$

Hvis beholderen ikke er en cirkulær cylinder er $A = A(h)$. Dette kan så indsættes i ligningen:

$$(4.2) \qquad \frac{dh}{dt} = -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A(h)}\sqrt{h} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A(h)}{\sqrt{h}}\,dh = -D\sqrt{2g}\;dt$$

som så (muligvis) kan integreres.

4.1 Kegleformet beholder

Vi tænker os en kegle med Højden H og radius i bundfladen R. Hullet er i bunden (ikke nødvendigvis, men det gør integrationen lidt lettere) og r betegner radius i tværsnittet ved vandstanden $H - h$. Der må gælde:

$$\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H} \quad\Rightarrow\quad r=\frac{H-h}{H}R \qquad \text{så} \qquad A(h)=\pi r^2=\pi\frac{R^2}{H^2}(H-h)^2$$

indsat i udtrykket (4.2) $\frac{A(h)}{\sqrt{h}}dh=-D\sqrt{2g}\ dt$ ovenfor får man:

$$\frac{\pi\frac{R^2}{H^2}(H-h)^2}{\sqrt{h}}dh=-D\sqrt{2g}\ dt \qquad\Leftrightarrow\qquad \frac{(H-h)^2}{\sqrt{h}}dh=-\frac{H^2}{\pi R^2}D\sqrt{2g}\ dt$$

$$\frac{(H-h)^2}{\sqrt{h}}dh=-\lambda dt \quad hvor \quad \lambda=\frac{H^2}{\pi R^2}D\sqrt{2g}$$

$$\int_H^h\frac{(H-h)^2}{\sqrt{h}}dh=-\lambda\int_0^t dt \quad\Leftrightarrow\quad \left[2H\sqrt{h}+\tfrac{4}{5}h^{\frac{5}{2}}-\tfrac{4}{3}Hh^{\frac{3}{2}}\right]_H^h=-\lambda t$$

$$2H\sqrt{h}+\tfrac{4}{5}h^{\frac{5}{2}}-\tfrac{4}{3}Hh^{\frac{3}{2}}-(2H\sqrt{H}+\tfrac{4}{5}H^{\frac{5}{2}}-\tfrac{4}{3}H^{\frac{5}{2}})=-\lambda t$$

Denne ligning kan imidlertid ikke løses analytisk, da det er en 5. gradsligning i kvadratrod *h*.

4.2 Beholderen er en omvendt kegle

Vi tænker os nu en omvendt kegle med Højden *H* og radius i bundfladen *R*. Hullet er i bunden (ikke nødvendigvis, men det gør integrationen lidt lettere). og *r* betegner radius i tværsnittet ved vandstanden *H* – *h*. Der må gælde:

$$\frac{r}{R}=\frac{h}{H} \quad\Rightarrow\quad r=\frac{h}{H}R \qquad \text{så} \quad A(h)=\pi r^2=\pi\frac{R^2}{H^2}h^2$$

indsat i udtrykket (4.2): $\frac{A(h)}{\sqrt{h}}dh=-D\sqrt{2g}\ dt$ ovenfor, får man:

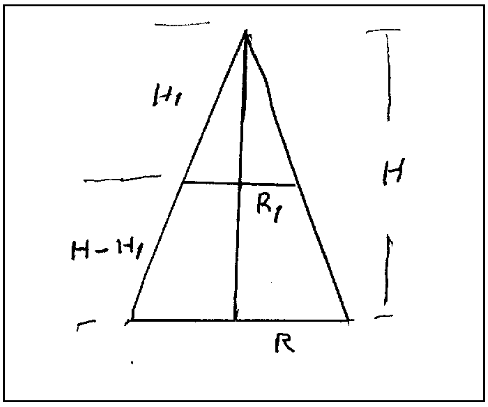
$$\frac{\pi\frac{R^2}{H^2}h^2}{\sqrt{h}}dh=-D\sqrt{2g}\ dt \qquad\Leftrightarrow\qquad \frac{h^2}{\sqrt{h}}dh=-\frac{H^2}{\pi R^2}D\sqrt{2g}\ dt$$

$$h\sqrt{h}dh=-\lambda dt \quad hvor \quad \lambda=\frac{H^2}{\pi R^2}D\sqrt{2g}$$

$$\int_H^h h\sqrt{h}dh=-\lambda\int_0^t dt \quad\Leftrightarrow\quad \left[\tfrac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}\right]_H^h=-\lambda t$$

$$\tfrac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}-\tfrac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}=-\lambda t \quad hvor \quad \lambda=\frac{H^2}{\pi R^2}D\sqrt{2g} \qquad\Rightarrow\qquad h=\left(H^{\frac{5}{2}}-\tfrac{5}{2}\lambda t\right)^{\frac{2}{5}}$$

4.3 Når beholderen er en keglestub



Der er ingen principiel forskel på en (omvendt) kegle og en omvendt keglestub. Kender Man nemlig højden af keglestubben $H_2 = H - H_1$, hvor H_1 er højden af den afskårne top, og de to radier i endefladerne er R og R_1 kan man bestemme højden H af keglen, hvorefter man blot kan indsætte i formlen for den omvendte kegle.

$$\frac{H}{H_1} = \frac{R}{R_1} \quad \Rightarrow \quad H = H_1 \frac{R}{R_1} \quad \Rightarrow$$

$$H_2 = H - H_1 = H_1\left(\frac{R}{R_1} - 1\right)$$

Herefter bestemmes: $H_1 = \dfrac{H_2}{\left(\dfrac{R}{R_1} - 1\right)} \Rightarrow H = H_1 \dfrac{R}{R_1}$

Indsættes dette H i udtrykket $A(h) = \pi r^2 = \pi \dfrac{R^2}{H^2} h^2$ og den samme formel som før anvendes, idet H, ved integrationen naturligvis skal erstattes af H_2.

$$h\sqrt{h}dh = -\lambda dt \quad hvor \quad \lambda = \frac{H^2}{\pi R^2} D\sqrt{2g}$$

$$\int_{H_2}^{h} h\sqrt{h}dh = -\lambda \int_0^t dt \quad \Leftrightarrow \quad \left[\tfrac{2}{5} h^{\frac{5}{2}}\right]_{H_2}^{h} = -\lambda t$$

$$\tfrac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{5} H_2^{\frac{5}{2}} = -\lambda t \quad hvor \quad \lambda = \frac{H^2}{\pi R^2} D\sqrt{2g} \quad \Rightarrow \quad h = \left(H_2^{\frac{5}{2}} - \tfrac{5}{2}\lambda t\right)^{\frac{2}{5}}$$