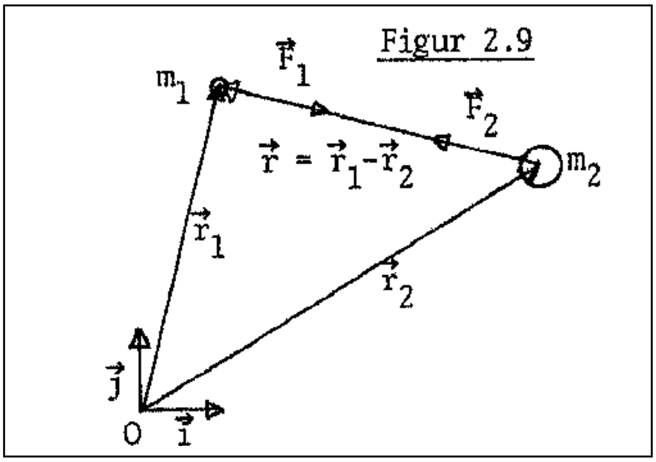
# To legeme problemet
# og
# Keplers love

## Indhold

1. To legeme problemet. Reduktion til centralbevægelse ........ 1
2. Løsning af differentialligningerne for en centralbevægelse ........ 2
2.1 Lagrange formalismen ........ 3
3. Ellipsens ligning i polære koordinater ........ 5
4. Keplers love ........ 6
5. Tilbage til to legeme problemets geometri ........ 7

Ole Witt-Hansen 2016

## 1. To legeme problemet. Reduktion til centralbevægelse




To legeme problemet, handler om at beskrive bevægelserne af to legemer, hvor kraften (eller deres potentielle energi), kun afhænger af deres indbyrdes afstand.
Det kan enten være gravitationskraften $F_G$ mellem to legemer med masser $m_1$ og $m_2$, givet ved Newtons Gravitationslov:

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Hvor $G$ =6,67 $10^{-11}$ $Nm^2/kg^2$ og $r$ er afstanden mellem de to (kugleformige) legemer.
Eller Coulombkraften kraften $F_C$ mellem to ladninger $Q_1$ og $Q_2$.

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \text{hvor} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{,}010^9 \; Nm^2/C^2$$

Det viser sig, at to legeme problemet kan reduceres til at løse en differentialligning for en centralbevægelse, hvilket jo betyder, at kraften på legemet, kun afhænger af afstanden til et fast givet punkt.

Hvis det ene legeme er langt tungere end det andet, vil bevægelsen af det lille legeme med god tilnærmelse være en centralbevægelse. Det gælder f.eks. for bevægelsen af en satellit omkring jorden eller planeternes bevægelse omkring solen.
Men ser vi på systemet måne og jord, så er der mærkbare afvigelser fra centralbevægelse.

I det følgende betegner vi differentiation med hensyn til tiden med en prik over bogstavet, således

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{ eller } \dot{r} = \frac{dr}{dt}.$$

Massemidtpunktet for de to legemer, betegnes $G$.
Hvis $\vec{r}_1$ *og* $\vec{r}_2$ betegner stedvektorerne til de to masser $m_1$ og $m_2$ er stedvektoren til massemidtpunktet givet ved:

(1.1) $$\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ er vektoren fra $m_2$ til $m_1$, som vist på figuren
De to ligninger løses nu, så vi får udtrykt $\vec{r}_1$ *og* $\vec{r}_2$ *ved* $\vec{r}$ *og* $\vec{r}_G$. $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ganges derfor med $m_2$

(1.2) $$\begin{aligned} m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 &= (m_1+m_2)\vec{r}_G \\ m_2\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2 &= m_2\vec{r} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_1 = \vec{r}_G + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \;\wedge\; \vec{r}_2 = \vec{r}_G - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

Såvel kraften imellem de to legemer, samt deres indbyrdes potentielle energi, af hænger kun af den relative afstand $r$.

$$E_{pot} = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

Den kinetiske energi er: $E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}$

Ved at indsætte de fundne udtryk for $\vec{r}_1$ *og* $\vec{r}_2$ finder man:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} m_1 (\dot{\vec{r}}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}})^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (\dot{\vec{r}}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}})^2$$

Vi sætter $\vec{v}_G = \dot{\vec{r}}_G$ *og* $\vec{u} = \dot{\vec{r}}$ og får:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} m_1 (\vec{v}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{u})^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (\vec{v}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u})^2$$

Det dobbelte produkt fra de to parenteser, ses at gå ud mod hinanden, og tilbage bliver der:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v_G^{\,2} + \tfrac{1}{2}\left( \frac{m_1 m_2^{\,2}}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^{\,2}}{(m_1 + m_2)^2} \right) u^2$$

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v_G^{\,2} + \tfrac{1}{2}\left( \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \right) u^2$$

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v_G^{\,2} + \tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} u^2$$

Vi har hermed fået udtrykt den kinetiske energi ved hastigheden af massemidtpunktet og den relative hastighed.

Udtrykket $m = \dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$ kaldes for den reducerede masse.

Hvis de to legemer udelukkende er påvirket af deres gensidige tiltrækning, er $\vec{v}_G$ konstant, og vi kan vælge vores koordinatsystem med begyndelsespunkt i *G,* så $\vec{v}_G = 0$.

Af udtrykket for den reducerede masse $\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_2}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}} \approx m_2 \quad hvis \quad m_1 >> m_2$ ,

ses at hvis $m_1$ er meget større end $m_2$ , svarende til systemet jord/måne, så svarer det med tilnærmelse til en central bevægelse af månen rundt om jorden.

Energien er summen af den kinetiske og potentielle energi, som hvis der er tale om gravitationskræfter er givet ved:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \tfrac{1}{2} m u^2 - G \frac{m_1 m_2}{r}$$

$m = \dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$ er den reducerede masse, *r* er afstanden mellem centrene på de to legemer og $\vec{u} = \dot{\vec{r}}$ .

## 2. Løsning af differentialligningerne for en centralbevægelse

Det er velkendt, at løsningen til bevægelsesligningerne for en centralbevægelse er en ellipse, en hyperbel med grænsetilfældene cirkel og parabel. Udledningen er dog langt fra simpel.

Der findes flere metoder, men jeg har valgt at anvende Lagrange formalismen, som jeg har hentet og bearbejdet fra Landau og Lifshitz: Mechanics fra 1960.

## 2.1 Lagrange formalismen

I Lagrange formalismen er den kinetiske energi *T* og den potentielle energi *U* udtrykt i generaliserede koordinater: $q_1, q_2, q_3, .. q_n$ med hastigheder $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, .. \dot{q}_n$, hvor $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$

Lagrange funktionen er:

$$L = T - U$$

og bevægelsesligningerne er:

(2.1) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

For at behandle centralbevægelsen udtrykker vi først den kinetiske og potentielle energi i polære koordinater $(r, \theta)$

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{hvor} \quad x = r\cos\theta \quad og \quad y = r\sin\theta$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - \dot{\theta}r\sin\theta \quad og \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta - \dot{\theta}r\cos\theta$$

Ved at kvadrere disse udtryk, under anvendelse af $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ finder man:

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

(hvilket også kan ses geometrisk, idet en infinitesimal forskydning *ds* fra $(r, \theta)$ til $(r + dr, \theta + d\theta)$ består af en tangential forskydning $rd\theta$ langs buen med radius $r$, efterfulgt af en radial forskydning *dr*. Stykkerne $rd\theta$, *dr*, og *ds* danner en retvinklet trekant, så $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$, hvorefter udtrykket ovenfor følger ved division med $dt^2$ ).

Ifølge Newtons gravitationslov er den potentielle energi $U(r) = -G\frac{mM}{r}$, hvor *M* er massen af centrallegemet, *m* er massen af satellitten, og *r* er afstanden mellem deres centre. Vi sætter for nemheds skyld $\alpha = GmM$, så $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$. Herefter bliver Lagrange funktionen:

(2.2) $$L = T - U = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r}$$

Som giver bevægelsesligningerne:

(2.3)
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{r^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \dot{A} \text{ (konstant)}$$

Den sidste ligning udtrykker Keplers 2. lov, at arealhastigheden er konstant.
Det areal der begrænses af en vinkel $d\theta$ på en bue med radius *r* er arealet af en trekant med "højde" $rd\theta$ *og* grundlinie *r* lig med $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ .
Den tangentielle hastighed er $v = r\dot{\theta}$, så konstant arealhastighed kommer ud på det samme som, at impulsmomentet $M = mr^2\dot{\theta} = mrv_{\tan gential}$ er konstant, som vi også ved fra mekanikken.

Til bestemmelse af banekurven er de Lagrange'ske bevægelsesligninger ikke så anvendelige, da det er 2. ordens differentialligninger, så vi anvender i stedet udtrykket for energien, som er en 1. ordens ligning.

(2.4) $$E = T + U = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r}$$

Her eliminerer vi $\dot{\theta}^2$, ved at anvende udtrykket for impulsmomentet: $M = mr^2\dot{\theta}$, og isolerer $\dot{\theta}^2 = \dfrac{M^2}{m^2 r^4}$, som indsat giver:

$$E = \tfrac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$ Herefter isolerer vi $\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{M^2}{m^2 r^2} + \frac{2\alpha}{mr}}$$ Hvorefter vi isolerer *dt*:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2E}{m} - \dfrac{M^2}{m^2 r^2} + \dfrac{2\alpha}{mr}}}$$

Endelig noterer vi os, at: $M = mr^2 \dfrac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad dt = \dfrac{mr^2}{M} d\theta$ , som indsat giver:

$$d\theta = \frac{M}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2E}{m} - \dfrac{M^2}{m^2 r^2} + \dfrac{2\alpha}{mr}}} = \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2mE - \dfrac{M^2}{r^2} + \dfrac{2m\alpha}{r}}}$$

Ved integration, finder man herved sammenhængen mellem θ og *r*, det vil sige banekurven i polære koordinater.

$$\theta = M \int \frac{\dfrac{1}{r^2} dr}{\sqrt{2mE - \dfrac{M^2}{r^2} + \dfrac{2m\alpha}{r}}}$$

Vi anvender nu substitutionen $z = \dfrac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad dz = -\dfrac{1}{r^2} dr$

$$\theta = M \int \frac{-dz}{\sqrt{2mE - M^2 z^2 + 2m\alpha z}}$$

Vi vil forsøge, at omskrive nævneren, så den kommer på formen: $\sqrt{1 - x^2}$ .

Hvis $M^2 z^2$ er kvadratet på 1. led og $-2m\alpha z$ skal være det dobbelte produkt, må det andet led være givet ved: $2m\alpha z = 2Mzy \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{m\alpha}{M}$. På denne måde:

$$\theta = -M \int \frac{dz}{\sqrt{2mE - (Mz - \dfrac{m\alpha}{M})^2 + \left(\dfrac{m\alpha}{M}\right)^2}}$$

Endelig sætter vi $2mE + \left(\dfrac{m\alpha}{M}\right)^2 = \beta^2$ og flytter denne faktor udenfor kvadratrodstegnet:

Samtidig med at $\dfrac{1}{\beta}(Mz - \dfrac{m\alpha}{M}) = x \quad \Rightarrow \quad dz = \dfrac{\beta}{M}dx$ og integralet er reduceret til:

$$\theta = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \cos^{-1} x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \cos\theta$$

Og ved at substituere tilbage: $\dfrac{1}{\beta}(Mz - \dfrac{m\alpha}{M}) = \cos\theta \;\Rightarrow\; (\dfrac{M}{r} - \dfrac{m\alpha}{M}) = \beta\cos\theta$

Sætter man: $p = \dfrac{M^2}{m\alpha}$ og $e = \sqrt{1 + \dfrac{2EM^2}{m\alpha^2}}$, kan udtrykket reduceres til:

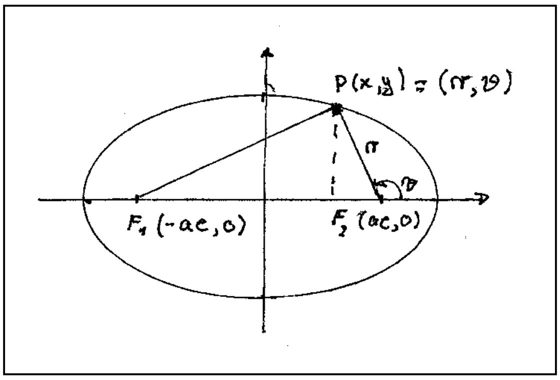
(2.4) $$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Denne ligning genkendes som ligningen for et keglesnit i polære koordinater. (Se nedenfor).
Ifølge definitionen er $e$ >0.

Hvis 0 $\leq$ $e$ < 1, vil $r$ variere mellem værdierne: $\dfrac{p}{1+e}$ *og* $\dfrac{p}{1-e}$ banekurven er en ellipse eller cirkel for $e$ =0.

Hvis 1 $\leq e$ er bevægelsen ikke begrænset, idet ligningen $1 + e\cos\theta = 0$ har løsningen: $\cos\theta = -\dfrac{1}{e}$.

## 3. Ellipsens ligning i polære koordinater




Ellipsens halve storakse er $a$. Punktet $P$ har koordinaterne ($x,y$) og de polære koordinater ($r,\theta$), som vist på tegningen. De to brændpunkter $F_1$ og $F_2$, har koordinater (-$ae$,0) og ($ae$,0), hvor $e$ er excentriciteten. *I* en elementær fremstilling og udledning af ellipsens ligning finder man følgende udtryk for ”brændstrålerne”

$$|F_1P| = a + ex \quad \text{og} \quad |F_2P| = a - ex$$

Samtidig er $|F_2P| = r$, og det ses af figuren, at

$x - ae = r\cos\theta$ => $x = r\cos\theta + ae$, som indsat i $|F_2P| = r = a - ex$ giver:

$$r = a - e(r\cos\theta + ae) \quad \Rightarrow \quad r(1 + e\cos\theta) = a(1 - e^2) \quad \Leftrightarrow$$

(3.1) $$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta} \qquad \Leftrightarrow \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Hvilket ses, at være i overensstemmelse med (2.4).

## 4. Keplers love

Keplers 1. lov: Alle planeterne bevæger sig i plane elliptiske baner med solen i det ene brændpunkt. Løsningen til bevægelsesligningerne $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ fremstiller for $0 \leq e < 1$ en ellipse, hvilket er indholdet af Keplers 1. lov.

Keplers 2. lov: Alle planeter bevæger sig med konstant arealhastighed.

Dette følger af (2.3).

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \dot{A} \text{ (konstant)}$$

Keplers 3. lov: Forholdet mellem 3. potens af middelafstanden $a$ = halve storakse og 2. potens af omløbstiden $T$, er den samme for alle planeter.

$$\frac{a^3}{T^2} = k_S$$

Vi tager udgangspunkt i udtrykket for impulsmomentet $M = mr^2\dot{\theta}$ som vi omskriver til:

$$Mdt = mr^2 d\theta \quad \Rightarrow \quad M\int_0^T dt = 2m\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}r^2 d\theta$$

Det første integral er lig med omløbstiden $T$, og det andet er lig med arealet af ellipsen, som er $\pi ab$. Så der gælder $MT = 2m\pi ab$. ($b$ = halve lilleakse)

For en ellipse gælder formlerne: $p = a(1-e^2) \quad og \quad \dfrac{b^2}{a^2} = (1-e^2) \;\Rightarrow\; b = \dfrac{p}{\sqrt{(1-e^2)}}$

For ellipsen fandt vi: $p = \dfrac{M^2}{m\alpha} \;\Rightarrow\; M^2 = pm\alpha \;\Rightarrow\; M = \sqrt{pm\alpha}$

Dette indsættes i

$$T = \frac{2\pi mab}{M} = \frac{2\pi mab}{\sqrt{pm\alpha}} = \frac{2\pi ap}{\sqrt{pm\alpha}\sqrt{1-e^2}}$$

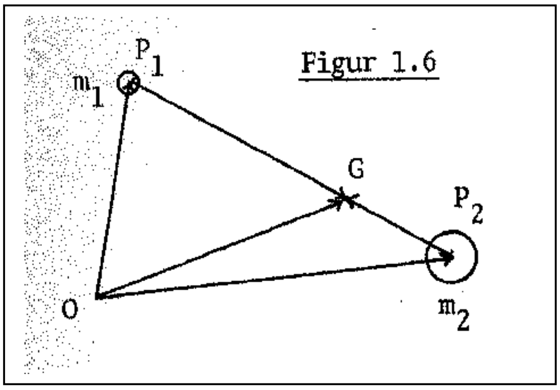
Indsættes $\sqrt{p} = \sqrt{a(1-e^2)}$ får man

$$T = \frac{2\pi ap}{\sqrt{pm\alpha}\sqrt{1-e^2}} = \frac{2\pi a\sqrt{p}}{\sqrt{m\alpha}\sqrt{1-e^2}} = \frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{m\alpha}}$$

(4.4) $$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m\alpha}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{m\alpha}{4\pi^2}$$

Som er indholdet af Keplers 3. lov.

## 5. Tilbage til to legeme problemets geometri




Når banekurven (2.4) for centralbevægelsen af den reducerede masse er fundet, kan banekurven for hvert af de to legemer bestemmes ud fra (1.2).
Dette kræver dog, at man kender positionen af massemidtpunktet *G* på forbindelseslinien mellem de to legemer. Den kan imidlertid elegant bestemmes ved hjælp af figuren til højre.

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 \vec{OP_1} + m_2 \vec{OP_2}) \quad \Leftrightarrow$$

$$(m_1 + m_2)\vec{OG} = m_1 \vec{OP_1} + m_2 \vec{OP_2} \quad \Leftrightarrow$$

$$m_1(\vec{OG} - \vec{OP_1}) = -m_2(\vec{OG} - \vec{OP_2}) \quad \Leftrightarrow$$

(5.1) $$m_1 \vec{P_1G} = -m_2 \vec{P_2G} \quad \Rightarrow \quad \frac{|P_1G|}{|P_2G|} = \frac{m_2}{m_1}$$

Af ovenstående fremgår, at massemidtpunktet *G* er placeret på forbindelseslinien mellem de to masser, og at *G* deler liniestykket fra $P_1$ til $P_2$ i det omvendte masseforhold.
Dette kan man for eksempel anvende til at udregne massemidtpunktets placering for systemet bestående af jorden og månen.

Forholdet $$\frac{M_{måne}}{M_{jord}} = 0{,}0123$$

Afstanden mellem deres centre er ca. 60*R*, hvor *R* er jordradius.
Hvis $r_G$ er afstanden fra jordens centrum til massemidtpunktet *G*, så gælder der ifølge ovenstående.

(5.2) $$\frac{r_G}{60R - r_G} = \frac{M_{måne}}{M_{jord}} = 0{,}0123 \quad \Rightarrow \quad r_G = 0{,}729R$$

Massemidtpunktet befinder sig altså inden for jordens overflade.
Som følge af deres gensidige massetiltrækning bevæger både jorden og månen sig i ellipsebaner om deres fælles brændpunkt, og med den samme omløbstid. Månens påvirkning af jorden giver derfor anledning til mindre uregelmæssigheder i jordens bane omkring solen, de såkaldte perturbationer.

Ole Witt-Hansen
Lektor emeritus