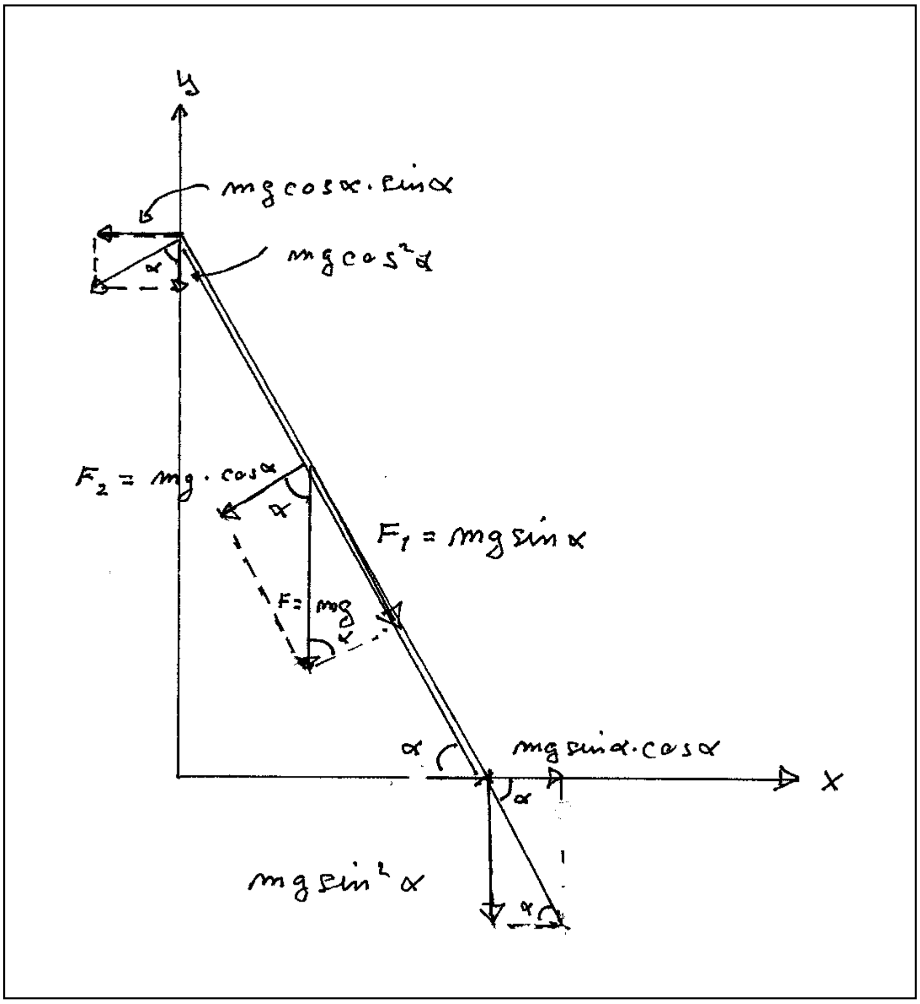
Den praktiske anvendelse af en teoretisk forklaring på ved hvilken vinkel en stige vil skride er nok til at overse, men formålet med denne note er også mere at vise nogle (måske glemte) analytiske teknikker, der kan anvendes på statiske problemer.
Først anvender vi en klassisk analyse, ved at opdele de virkende kræfter i komposanter, og dernæst anvendes virtuelle kræfters princip, som er en del af den analytiske mekanik opskrevet ved hjælp af Lagrange formalismen.



Klassisk mekanisk analyse

Figuren viser en skematisk tegning af en stige, der står ad en mur. Selv om det næppe har praktisk betydning, kan man stille sig den opgave at beregne ved vinkel at stigen skrider. Det kræver naturligvis kendskab til gnidningskoefficienten μ mellem stige og underlag.
Stigen danner vinklen α med vandret (x-retningen).
Statiske problemer er ofte mere udfordrende end dynamiske, idet den resulterende kraft jo er nul i alle punkter.
Vi har kun skematisk tegnet stigen, men vi viser senere, at det ikke gør nogen forskel om eller hvor på stigen, der står en person.

Vi opløser tyngdekraften fra stigens massemidtpunkt i en komposant F_1 langs med stigen, og en komposant F_2 vinkelret på stigen. Af figuren ses at:

$$F_1 = mg\sin\alpha \qquad og \qquad F_2 = mg\cos\alpha$$

Vi anbringer da F_1 ved stigens fod, og F_2 ved toppen af stigen.

Såvel F_1 og F_2 opløses da efter de to akseretninger x og y.

Dette giver, som det ses ud fra figuren:

$$F_{1x} = mg\sin\alpha\cos\alpha \quad F_{1y} = mg\sin^2\alpha \qquad og \qquad F_{2x} = mg\sin\alpha\cos\alpha \quad F_{2y} = mg\cos^2\alpha$$

Stigen er påvirket af de to kræfter F_{1x} og F_{2y}, der får stigen til at skride og de to modsatrettede gnidningskræfter hidrørende fra normalkræfterne F_{1y} og F_{2x}.

$$F_x = mg\cos\alpha\sin\alpha + mg\cos^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad F_x = mg\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$F_{gn} = \mu mg\sin^2\alpha + \mu mg\cos\alpha\sin\alpha \quad \Leftrightarrow \quad F_{gn} = \mu mg\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

Stigen skrider ikke så længe,

$$F_x < F_{gn}. \quad \Leftrightarrow \quad mg\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) < \mu mg\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

Som kan reduceres til

$$\tan\alpha > \frac{1}{\mu}$$

Et overordentlig simpelt svar, som umiddelbart svarer til vores forventninger, ved en meget stor og meget lille gnidningskoefficient. Ved en gnidningskoefficient på 0,75, er den kritiske vinkel $53{,}1^0$

Gnidningskoefficienterne kan være forskellige ved stigens top og fod, men det ændrer kun ved udtrykket for gnidningskraften - og ikke fundamentalt ved resultatet.

$$F_{gn} = \mu_1 mg\sin^2\alpha + \mu_2 mg\cos\alpha\sin\alpha \quad \Leftrightarrow \quad F_{gn} = mg\sin\alpha(\mu_1\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha)$$

Udtrykket for F_x er det samme, så man finder som før: Stigen skrider ikke, hvis $F_x < F_{gn}$

$$\Leftrightarrow \quad mg\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) < mg\sin\alpha(\mu_1\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha)$$

$$\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) < \sin\alpha(\mu_1\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha)$$

Ved division med $cos^2\alpha$ fås:

$$\tan\alpha + 1 < \tan\alpha(\mu_1\tan\alpha + \mu_2)$$

Med den tilsvarende andengradsligning til bestemmelse af α.

$$\tan\alpha + 1 = \tan\alpha(\mu_1 \tan\alpha + \mu_2) \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 \tan^2\alpha + (\mu_2 - 1)\tan\alpha - 1 = 0$$

Ligningen har diskriminanten: $d = (\mu_2 - 1)^2 + 4\mu_1$ sætter vi $\mu_2 = \mu_1 = \mu$ er $d = (\mu + 1)^2$ og man finder

$$\tan\alpha = \frac{1 - \mu + 1 + \mu}{2\mu} = \frac{1}{\mu}$$, som man skulle.

Virtuelle kræfters princip

Hvis U betegner den potentielle energi, så gælder der som bekendt, at kraften er lig med minus gradienten af den potentielle energi: $\vec{F} = -\nabla U$ Skrevet ud: $\vec{F} = -(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})$.

I den analytiske mekanik, hvor den potentielle energi er udtrykt i generaliserede koordinater, kan man bestemme kraften i en "retning" r (langs en koordinat) som:

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

Denne ligning kan ofte med fordel anvendes i stedet for at opløse kræfter efter komposanter.

Vi laver nu den tilføjelse, at der befinder sig en mand på stigen stykket d oppe ad stigen, som har længden $2L$. Tegningen er den samme som før. Stigen har fodpunkt i $(x,0)$ og stigens top er placeret i $(0,y)$. Der gælder derfor: $x = 2L\cos\alpha$ $y = 2L\sin\alpha$. Højden h, som manden befinder sig over jorden er $h = d\sin\alpha$. Manden har massen M, stigen har massen m.

Vi opskriver udtrykket for den potentielle energi ud fra formlen mgh.

$$U = mg\ L\sin\alpha + Mgd\sin\alpha$$

Ud fra dette udtryk, kan vi nu bestemme kraften i x-retning (som får stigen til at skride) og kraften i y-retning, som qua gnidningskoefficienten, bremser stigen.

Vi skal anvende følgende omskrivning: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \alpha}(\frac{\partial x}{\partial \alpha})^{-1}$ og tilsvarende for y.

Idet $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -2L\sin\alpha$ $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 2L\cos\alpha$ finder man direkte:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial \alpha}(\frac{\partial x}{\partial \alpha})^{-1} = \frac{mgL\cos\alpha + Mgd\cos\alpha}{2L\sin\alpha} = \frac{mgL + Mgd}{2\tan\alpha}$$
$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \alpha}(\frac{\partial y}{\partial \alpha})^{-1} = -\frac{mgL\cos\alpha + Mgd\cos\alpha}{2L\cos\alpha} = -\frac{mgL + Mgd}{2L}$$

Betingelsen for at stigen ikke vælter, er at $F_x < \mu\ F_y$, som giver uligheden:

$$\frac{mgL + Mgd}{2\tan\alpha} < \mu \frac{mgL + Mgd}{2L} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\alpha > \frac{1}{\mu}$$

Vi finder altså nøjagtig den samme betingelse som før på en mere elegant med nok en del mere uigennemskuelig måde.
Vi bemærker også, at det ikke gør nogen forskel om, der er en mand på stigen, eller hvor han er placeret på stigen.

Ole Witt-Hansen
18.09.2013