

Simulation af tre legeme bevægelser

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk



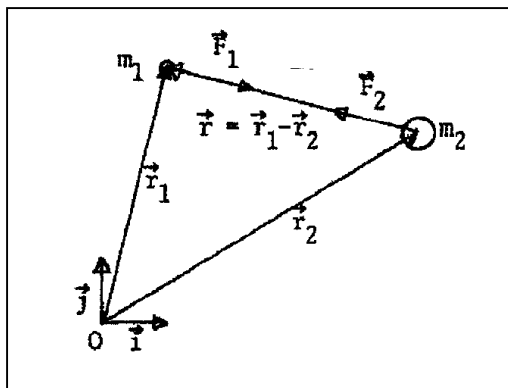
Indhold

1. Newtons gravitationslov	1
2. De gravitationelle bevægelsesligninger for et system af 3 legemer.....	1
2.1 Historisk oversigt	2
3. Ustabile tre legeme bevægelser.....	3
4. Stabile tre legeme Kepler bevægelser	4
4.1 Eksempel på en ustabil to planet bevægelse.	5
4.2 Jord, med måne, som selv er omkredset af en satellit.....	5
5. Ballistisk raket til månen.....	6
6. Næsten stabil tre legeme bevægelse, hvor tre ens masser anbragt I en symmetrisk konfiguration.....	7

1. Newtons gravitationslov

Den tiltrækningskraft, som virker mellem to massive legemer med masser m_1 og m_2 , og som befinder sig i afstanden r fra hinanden er givet ved Newtons gravitationslov:

$$(1.1) \quad F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



G er gravitationskonstanten $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$.

Vektoren \vec{r} har begyndelsespunkt i m_2 og endepunkt i m_1 .

Udtrykket for gravitationskraften skrevet på vektorform bliver, ifølg figuren til venstre.

$$\vec{F}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

Hvis de to masser har koordinaterne: (x_1, y_1) og (x_2, y_2) , så kan kraften mellem dem skrives på formen:

$$F_{1x} = G \frac{m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^3} \quad \text{og} \quad F_{1y} = G \frac{m_1 m_2 (y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^3}$$

Og følgelig bliver accelerationerne af m_1 :

$$\ddot{x}_1 = G \frac{m_2 (x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^3} \quad \text{og} \quad \ddot{y}_1 = G \frac{m_2 (y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^3}$$

Vi skal anvende disse to udtryk i det følgende.

2. De gravitationelle bevægelsesligninger for et system af 3 legemer

For et 3 legeme system med masserne m_1 , m_2 og m_3 , og hvor de tre masser er placeret i punkterne (x_1, y_1) , (x_2, y_2) og (x_3, y_3) , bliver bevægelsesligningerne 6 koblede differentilligninger af anden orden.

$$\ddot{x}_1 = Gm_2 \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^3} + Gm_3 \frac{(x_3 - x_1)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}^3}$$

$$\ddot{y}_1 = Gm_2 \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^3} + Gm_3 \frac{(y_3 - y_1)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}^3}$$

$$\ddot{x}_2 = Gm_1 \frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^3} + Gm_3 \frac{(x_3 - x_2)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}^3}$$

$$\ddot{y}_2 = Gm_1 \frac{(y_1 - y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^3} + Gm_3 \frac{(y_3 - y_2)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}^3}$$

$$\ddot{x}_3 = Gm_1 \frac{(x_1 - x_3)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}^3} + Gm_2 \frac{(x_2 - x_3)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}^3}$$

$$\ddot{y}_3 = Gm_1 \frac{(y_1 - y_3)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}^3} + Gm_2 \frac{(y_2 - y_3)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}^3}$$

At der ikke findes nogen general metode til at finde en analytisk løsning til tre legeme problemet er velkendt, hvilket allerede blev bevist af den franske fysiker og matematiker Poincaré.

To legeme problemet kan løses analytisk (www.olewitthansen.dk To legeme problemet), ved en transformation til en centralbevægelse af den reducerede masse omkring de to legemers massemidt punkt. En lignende tilgang er imidlertid ikke mulig, hvad angår 3 legeme problemet. Næsten 300 års matematiske anstrengelser har nogensinde resulteret i en analytisk løsning til problemet ej heller for formuleringen af en stabilitetsbetingelse for et sådant system, bortset fra det tilfælde, at den ene af masserne er langt tungere end de to andre, eksempelvis sol, jord, måne, hvor problemet kan løses ved hjælp af perturbationsregning - eller rent akademiske tilfælde af tre ens masser i en helt symmetrisk konfiguration.

2.1 Historisk oversigt

Den eneste måde at bestemme banekurverne for himmellegemer i tre legeme problemet har været ved numeriske metoder, og – indtil midten af 60'erne – ved håndkraft og mekaniske regnemaskiner.

Da jeg begyndte på H.C. Ørstedts instituttet i 1964, rådede instituttet over én og kun én elektronisk regnemaskine (computer), nemlig den danskbyggede Gier. Den havde 1 kb magnetisk ferrit lager, som arbejdede sammen med en magnetisk tromle. Den tid det tog for at lave en operation f.eks. en addition, var vel tusind gange længere end det er tilfældet for en almindelig bærbar computer i dag. Gier maskinen var anbragt i 4 store skabe, den havde en teletype, en papirstrimmelæser og en printer, som også var på størrelse med et klædeskab i et rum på vel 30 m². Skønt de var et enormt fremskridt at kunne udregne integraler og løse differentiaalligninger numerisk, så varede det mere end 20 år, før de grafiske farveskærme (opløsning 350 x 200 pixels) blev tilgængelige for den almindelige bruger.

Den danske datalog og programmer Anders Hejlsberg var den første, som det lykkedes at lave en MS-DOS baseret Pascal Compiler (PolyPascal), hvilket skete i midten af 80'erne. Den havde en IDE (Integreret Development Environment), hvilket altså betød, at oversætteren havde en editor, så skrivning af programteksten og oversættelsen var et og samme program.

Anders Hejlsberg blev i slutningen af 80'erne headhunted til Borland i USA, hvor han blev chef arkitekt for den legendariske Turbo-Pascal 2.0 – 7.0 oversætter. Det var en videreudvikling af PolyPascal, men nu med en langt forbedret editor og fulde grafiske faciliteter. TurboPascal var en oversætter og ikke en fortolker, som BASIC og senere Java. Resultatet af et program var en *.exe fil, som kunne afvikles på hvilken som helst DOS-baseret computer i hele verden.

Turbo-Pascal var også funderet strukturelt på et teoretisk datalogisk grundlag, dette i modsætning til de andre programmeringssprog som Basic, C og andre.

TurboPascal havde fra begyndelsen en IDE (Integrated Development Environment), med de samme editeringsfaciliteter som Word, noget som for eksempel Java 10 år senere aldrig opnåede.

Senere udviklede Anders Hejlsberg som den første Windows programmeringsværktøj Delphi IDE (2.0 – 8.0), som blev præsenteret i 1995, med en IDE, der som det første programmeringssprog havde indbyggede – klar til brug – MS-Windows komponenter, som var de samme komponenter, som var kendt fra Windows 95, og følgende udgaver af Windows til og med (det sidste rigtig velfungerende Windows platform) XP.

Programmer skrevet i Delphi, så nøjagtig ud som de professionelle Windows programmer.

Grunden til denne korte historiske oversigt er, at det for en matematik og fysik studerende fra 1964, var det en åbenbaring at kunne lave computer genererede grafer af funktioner, at kunne differentiere (numerisk og analytisk), at kunne udregne integraler, at kunne løse transcendent ligninger numerisk og især at kunne løse flere koblede differentialligninger (af første eller anden orden) og præsentere løsninger direkte på en grafisk skærm på mindre end et sekund i to eller 3 dimensional koordinatsystemer med inddelinger og tal på akserne.

Hvad angår Turbo Pascal, så kunne man med det tilhørende "Graphics Tool" kun tegne punkter, liniestykker, fyldte eller ikke fyldte firkanter og ellipser. Så før man kunne udvikle et generelt program, var det nødvendigt at lave et "Windows" interface med menuer, en tekst editor osv.

Hvis programmet skulle kunne behandle mere end et problem, så var det nødvendigt at alt input var text-filer som blev fortolket og derefter behandlet. Et sådant program tog mig mere end et år at udarbejde, og da det var færdigt havde de ti 64 kb units og fyldte 75 sider.

Programmet kørte fint på Win95 og Win98. Især, fordi det her var muligt at lave et DOS screen dump af den grafiske skærm, som direkte indsættes i et Word dokument. Efter Windows XP kunne programmet stadig køre, men det var ikke muligt at lave et screen dump længere, hvilket naturligvis var et alvorligt problem, hvis resultatet af en kørsel skulle overføres til et Word dokument. Efter WinXP kunne et program med DOS-grafik ikke længere afvikles på Windows platformen, og det kunne Delphi IDE-en for resten heller ikke. Delphi exe-filer kan dog stadig afvikles i Windows.

Heldigvis har jeg stadig en stationær computer, som kører på Windows 98, så jeg kan stadig lave et grafik dump af skærmen og overføre det til et Windows 10 Word dokument, som det er tilfældet i denne artikel.

Selv om jeg fra slutningen af 90'erne udelukkende skrev programmer i Delphi, og lavede et generelt program til numerisk og grafisk behandling af fysikøvelser i gymnasiet, så har jeg bevaret det mere end 20 år gamle Turbo Pascal program. Det var simpelthen for omfattende og tidkrævende at skrive det om i Delphi.

TurboPascal programmet kan blandt mange andre ting løse op til 6 koblede differentilligninger, tegne vilkårlige kombinationer af løsningerne i ordentlige koordinatsystemer, ligegyldig hvad akserne er og både i to og tre dimensioner.

Skønt, der siden 90'erne, og især siden 2000 har været adskillige matematikprogrammer på markedet, det første var vist DERIVE, så har jeg aldrig fundet et program, der kunne matche mit program med hensyn til muligheder for grafiske presentationer

Alle grafer i denne artikel og i mine øvrige artikler med grafiske præsentationer er lavet med det mere en 20 år gamle TurboPascal program.

Det er en empirisk kendsgerning, for eksempel fra planterne og deres månens bevægelse, at gravitationelle 3 legeme bevægelser (eller mange legeme bevægelse) kun er stabil, hvis et af legemerne er meget tungere end de øvrige, og hvis de mindre legemer ikke kommer alt for tæt på hinanden.

Nedenfor er vist simulationer af forskellige stabile og ustabile 3 legeme bevægelser.

Det er imidlertid ikke muligt at give en streng matematisk betingelse for stabilitet, idet ustabile 3 legeme bevægelser udvikler sig kaotisk, hvilket som bekendt betyder at selv en lille ændring i begyndelsesbetingelserne kan give anledning til dramatiske ændringer i bevægelserne på længere sigt.

I simulationerne nedenfor måles alle afstande i Mm og hastigheder i Mm/h

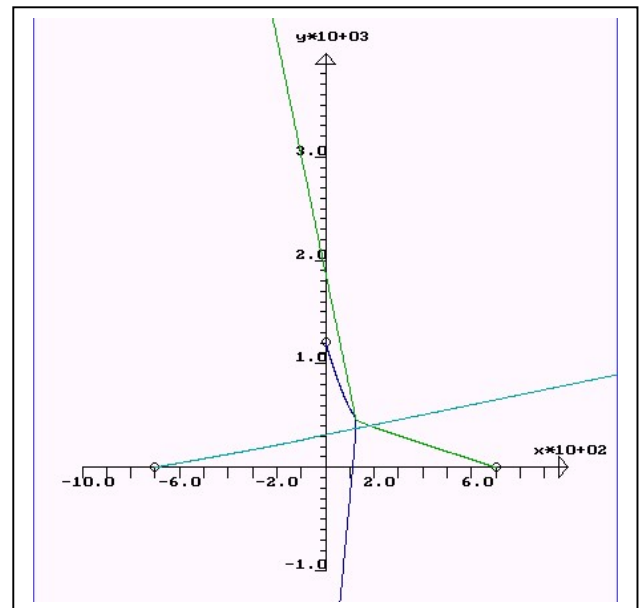
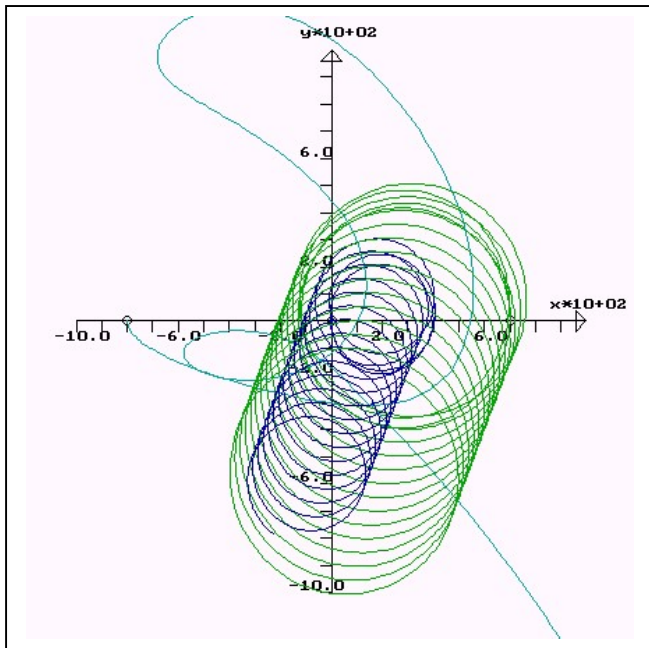
I disse enheder er værdien af $GM_{jord} = 5169$ og $GM_{måne} = 63.6$.

3. Ustabile tre legeme bevægelser

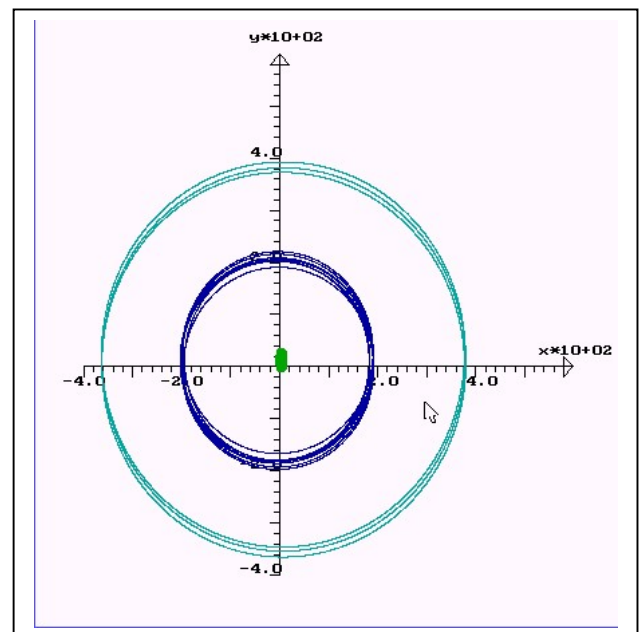
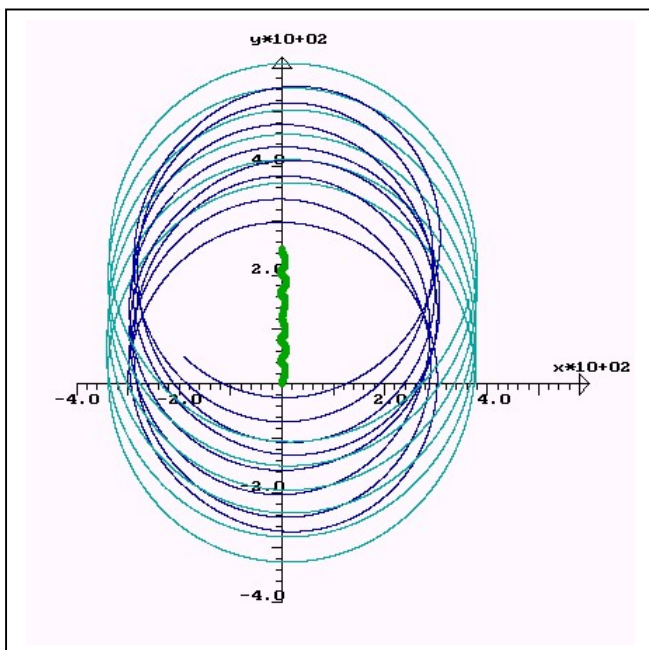
I figuren nedenfor til venstre er 3 legemer med masser, som er sammenlignelige med jordens masse placeret $(-800,0)$, $(700,0)$ and $(0,0)$, og tildelt begyndeshastigheder, svarende til en cirkelbevægelse omkring massen i $(0,0)$. Men som det fremgår, så indleder den lettere masse til

venstre fra begyndelsen en kaotisk bevægelse, og bliver slynget ud og er ikke længere bundet til de to andre masser. De to øvrige masser fortsætter en stabil to legeme bevægelse om deres fælles massemidtpunkt. Der findes ingen justering af begyndelsestilhænderne for de tre masser, som fører til en stabil konfiguration af bevægelserne.

På figuren til højre, er de tre masser placeret i den samme positioner, men uden begyndelsestilhænder. Ikke så overraskende vil de tre legemer bevæge sig langs rette linier, bortset fra hvor to af legemerne tilfældigvis kommer tæt på hinanden og foretager et brat drejning.



4. Stabile tre legeme bevægelser



I figurene foroven, har vi et system bestående af jorden (den tykke grønne prik) og to satellitter med henholdsvis månens masse og halvdelen af månens masse, og som hver har en begyndeshastighed svarende til en jævn cirkel bevægelse, men med modsatte retninger. Bemærk, at jorden også bevæger sig betragteligt, hvilket skyldes at de to måner fra begyndelsen befinder sig på samme side i forhold til jorden. Bevægelsen er stabil, idet de to baner for månerne aldrig krydser hinanden.

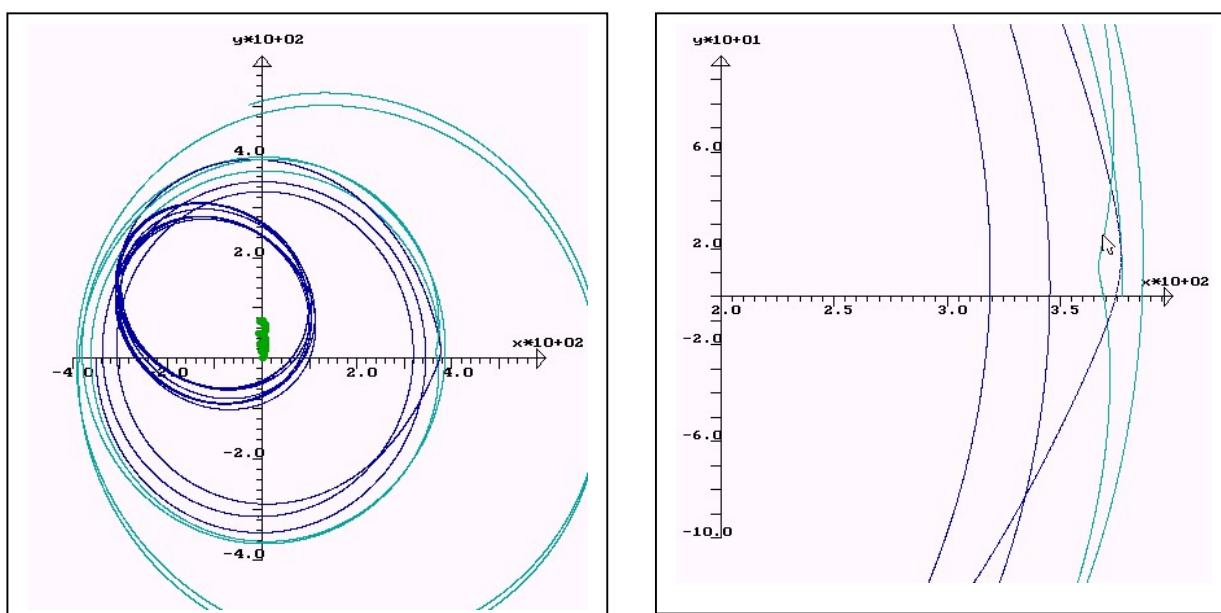
I figuren til højre er det ændret, så de to måner har samme omløbsretning, men befinder sig på modsatte sider af jorden. At jorden stadig bevæger sig lidt skyldes at den en måne har den dobbelte masse af den anden.

4.1 Eksempel på en ustabil to planet bevægelse.

På figuren nedenfor bliver to satellitter med en måne-masse og en halv måne-masse sendt i kredsløb (cirkelbevægelse) med baneradier, som kun afviger lidt fra hinanden. Omløbsretningen for de to måner er den samme. De første to omgange svarer nogenlunde til en stabil satellitbevægelse, men så krydser de to baner hinanden, hvilket betyder en afvigelse fra cirkelbevægelse for begge satellitter. Den blå satellit vælger en ellipsebevægelse tættere på jorden mens den grønne vælger en bane med større radius.

Herefter bevæger satellitterne sig formodentlig igen i en stabil bevægelse.

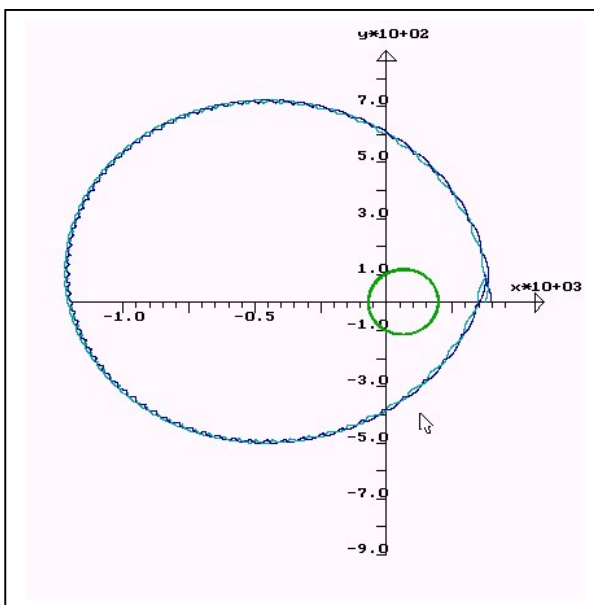
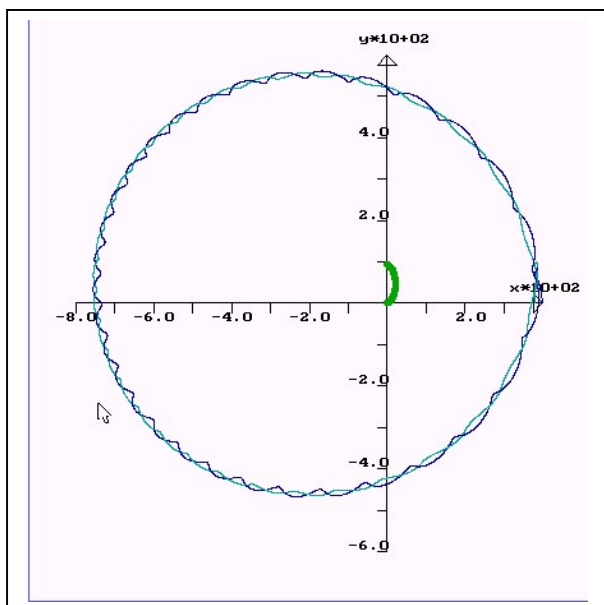
Området, hvor banerne krydser hinanden, er vist forstørret på figuren til højre. Banekurven for den blå satellit bliver afbøjet indad, mens den grønne bliver afbøjet udad.



4.2 Jord, med måne, som selv er omkredset af en satellit

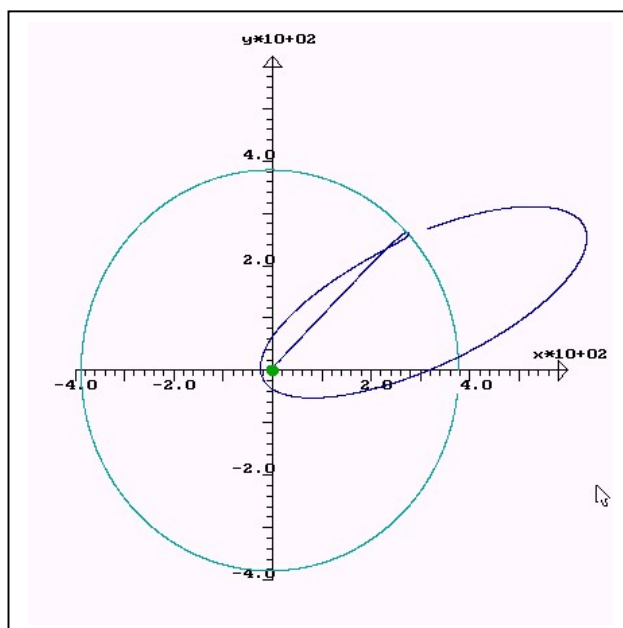
Nedenfor er vist to simulationer med jorden og månen, og hvor månen selv har en satellit med halvdelen af månens masse. Det er kun størrelsesforholdet, som adskiller de to simulationer. Bevægelsen er fuldstændig stabil, ligesom satellittens kredsløb om månen er en fuldstændig stabil cirkelbevægelse.

På figuren til højre, har vi i stedet for at vise jordens bevægelse vist den relative bevægelse af månen og dens satellit forstørret med en faktor 100, som ses at være en jævn cirkelbevægelse.



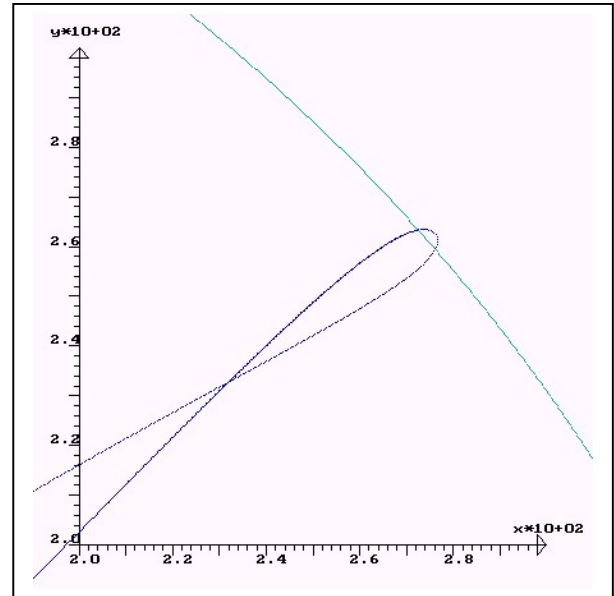
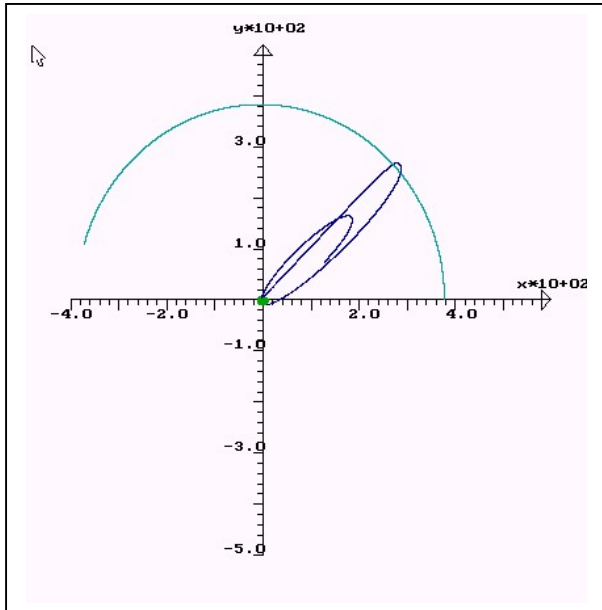
5. Ballistisk raket til månen

Det er et kuriosum, at det er muligt at opsende en raket fra jorden med en given retning og hastighed mod månen, hvorefter den laver et kredsløb om månen og vender tilbage til jorden. Simulationerne nedenfor viser, at faktisk er muligt. I det første tilfælde rammer raketten ganske vidst ikke jorden, men indleder en elliptisk bane omkring jorden.



I figuren nedenfor rammer raketten faktisk jorden, (men det ved differentialligningerne ikke, da alle objekter er matematisk repræsenteret ved et punkt). Bevægelsen af jorden skyldes tilstedeværelsen af månen, naturligvis.

På figuren til højre er rakettenes omløb om månen vist forstørret.



6. Næsten stabil tre legeme bevægelse, hvor tre ens masser anbragt i en symmetrisk konfiguration

Det er et (teoretisk?) faktum, at der for tre forskellige masser af samme størrelsesorden, ikke findes en stabil tre legeme bevægelse.

Hvis man søger på nettet finder man stort set ingen artikler, som giver en analytisk eller næsten analytisk behandling af problemet. (De drukner næsten i referencer til en litterær bog af samme navn, men som intet med fysik har at gøre). Artiklerne er mest leksikale og beskæftiger sig mest med teoretisk stabile løsninger til tre legeme problemet, hvor tre identiske masser bevæger sig i en symmetrisk konfiguration.

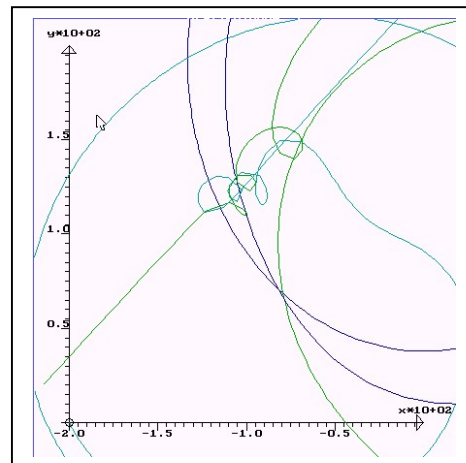
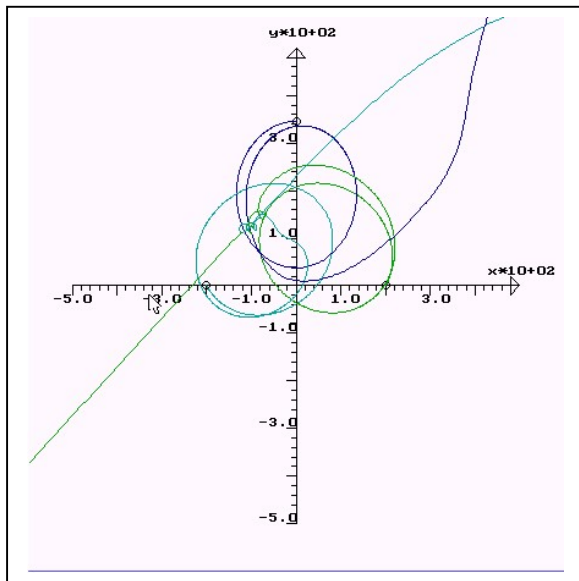
Euler var den første, som opdagede en (matematisk) stabil konfiguration, hvor de tre ens masser befinder sig i hjørnerne af en ligesidet trekant.

Senere er der opdaget adskillige flere (matematisk) stabile konfigurationer, hvilket dog mest synes at have akademisk interesse.

Imidlertid, og som tidligere nævnt, så er bevægelsesligningerne ulineære og derfor udvikler løsningerne sig kaotisk. Dette er også indholdet af den efterhånden næsten glemte og stærkt overvurderede kaosteori, som var en folkelig hype i 70'erne og 80'erne, som optrådte i mange film, mest spektakulært i Spielbergs Jurassic Park.

I mit første forsøg med at lave en stabil konfiguration, har jeg anbragt de tre masser i hjørnerne af en ligesidet trekant, hvor hver af masserne udfører en jævn cirkelbevægelse omkring massemidtpunktet af de to andre masser. Simulationen er vist nedenfor.

Selvom de tre legemer kommer nogenlunde fra start, så går det galt allerede efter halvanden omgang, der hvor banerne krydser hinanden. Detaljerne kan ses på figuren til højre, hvor den lyseblå og den grønne bane indleder et helt kaotisk forløb. Hvorvidt løsninger faktisk er stabile løsninger til bevægelsesligningerne kræver overordentlig omfattende regninger.

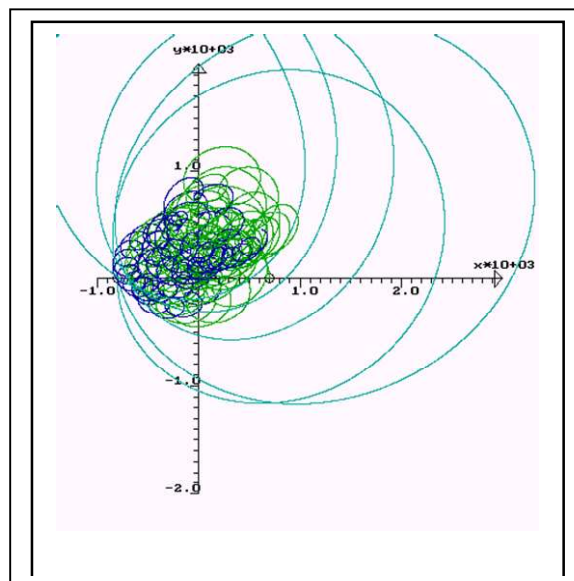


Efter længere tid er billedet som vist nedenfor.

Den lyseblå masse kredser om en kaotisk bevægelse af den grønne og den blå masse.

Bevægelserne er begrænsede, men kaotiske.

Forsøg på at justere hastighederne fører ikke til bedre resultater.

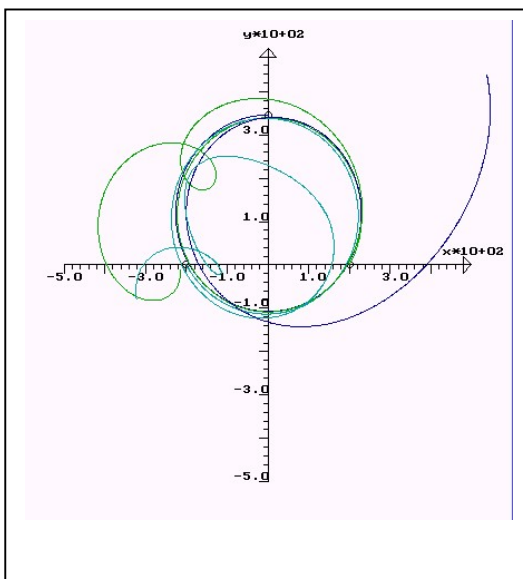
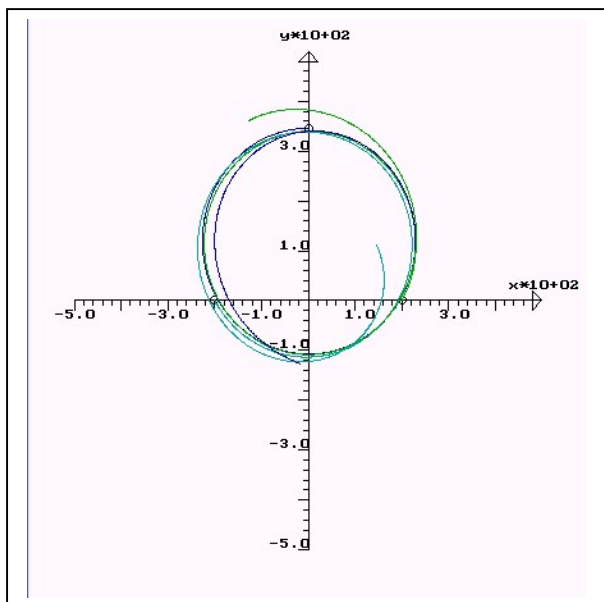


En anden ide kunne være, at lade de tre legemer være anbragt i hjørnerne af en ligesidet trekant og kredse i en jævn cirkelbevægelse om massemidtpunktet (medianernes skæringspunkt) i trekanten. På denne måde vil bevægelsen af de tre masser svare til rotation af trekanten med bevarelsen af de relative positioner af de tre masser.

Denne konfiguration giver bestemt et bedre resultat end den foregående simulation, men efter få omgange vil en mindre forskel i legemernes positioner og hastigheder udarte sig til kaotisk bevægelse. Rent logisk burde denne 3 legeme konfiguration være stabil, da der er fuldstændig symmetri mellem de tre legemer. Imidlertid vil de ulineære differentialligninger føre til en kaotisk bevægelse, næsten ligegyldig hvad. Systemet er ikke i stabil ligevægt, som en to-legeme bevægelse, men i en ustabil ligevægt, hvor den mindste forskydning fører til en tilstand bort fra ligevægten.

På figuren nedenfor er vist de første to omgange, som ser rimelige ud. De tre baner ligger næsten, men også kun næsten oven i hinanden, men på den tredje omgang er den grønne bane allerede på vej "off piste".

Herefter udvikler det sig hurtigt, og på grafen til højre kan man se at vi kun har en reminiscens af en jævn cirkelbevægelse. Igen kan man forsøge sig med at ændre lidt på størrelsen og retningen af hastighederne, men det fører ikke til et bedre resultat.



Nedenfor er vist to grafer, hvor grafen til højre er et forstørret billede, der, hvor det første gang går galt, mens den anden viser at bevægelserne hurtigt udvikler sig totalt kaotisk.

