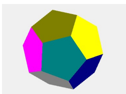
Retlinet bevægelse af et legeme i væsker og gasser

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk



Ole Witt-Hansen

2008

3. Retlinet bevægelse af et legeme i væsker og gasser

Når man analyserer mekaniske systemer, så antager man som regel, at de er gnidningsfrie.
Dette er naturligvis kun realistisk i en vis udstrækning, men de diferentialligninger, der beskriver systemet, kan ofte kun løses, hvis man ser bort fra gnidning, eller hvis gnidningskraften ikke afhænger af hastigheden andet end lineært.

Vi vil nu beskrive nogle simple eksempler på bevægelse i gasser og væsker, hvor gnidningen (viskositeten) afhænger af hastigheden.

3.1 kugleformet legeme som synker i en væske

Vi skal først betragte en partikel (karakteristisk en kugle), der synker i en væske under påvirkning af tyngdekraften.
Hvis partiklens hastighed i væsken ikke er for stor, er der tale om *laminar* strømning.
I dette tilfælde er gnidningskraften proportional med og modsat rettet hastigheden.
Hvis hastigheden vokser, er der derimod tale om *turbulent* strømning.
Turbulens kan bedst beskrives ved, at der opstår strømhvirvler i væsken eller gassen.

Turbulens er et af de stadig delvis uløste problemer i den klassiske fysik. Ingen har kunnet give en stringent teoretisk forklaring på, hvorfor og især hvornår turbulens opstår.

Et teoretisk udtryk for gnidningskraften på en kugle ved *laminar* strømning er givet ved Stokes lov.

(3.1) $$F_{gn} = 6\pi\eta r v$$

Hvor r = Radius af kuglen, v = Hastigheden, η = viskositetskoefficienten af væsken.

I det følgende, vil vi blot for kortheds skyld skrive proportionaliteten mellem gnidningskraft og hastighed som $F_{gn} = \alpha \cdot v$. Denne formel gælder uafhængig af legemets form, blot der er tale om laminar strømning. For en bevægelse langs en x-akse gælder der som bekendt:

Hastighed: $v = \frac{dx}{dt}$, acceleration: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ og Newtons 2. lov: $F_{res} = ma$

Et legeme, der synker i en væske, vil være påvirket af:

1. Tyngdekraften $F_T = mg$.

2. En opdrift $F_{op} = \rho_v V g$

(Lig med tyngden af den fortrængte væskemængde) hvor ρ_v er væskens massefylde og $V = \frac{m}{\rho}$ er rumfanget af legemet med masefylden ρ .

3. gnidningskraften: $F_{gn} = \alpha v$

$$F_T - F_{op} = mg - \rho_v Vg = \rho Vg - \rho_v Vg = (\rho - \rho_v)Vg = m_r g\,,$$

hvor $m_v g$ er det, som tyngden reduceres til, når legemet nedsænkes i væsken.
Bevægelsesligningen er derfor:

(3.2) $$F_{res} = ma \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = m_v g - \alpha v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = \frac{m_v}{m}g$$

For nemheds skyld sætter vi $g_v = \frac{m_v}{m}g$

Ligningen løses helt på samme måde, som vi gjorde det i (2.4). Vi multiplicerer med $e^{\frac{\alpha}{m}\cdot t}$ og omskriver.

$$e^{\frac{\alpha}{m}\cdot t}\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}e^{\frac{\alpha}{m}\cdot t}v = e^{\frac{\alpha}{m}\cdot t}g_v \qquad \Leftrightarrow$$

(3.3) $$\frac{d(ve^{\frac{\alpha}{m}\cdot t})}{dt} = e^{\frac{\alpha}{m}\cdot t}g_v \qquad \Leftrightarrow$$

$$ve^{\frac{\alpha}{m}\cdot t} = \frac{m}{\alpha}e^{\frac{\alpha}{m}\cdot t}g_v + c$$

Som løses med hensyn til v.

(3.4) $$v = \frac{mg_v}{\alpha} + ce^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t} \qquad \Leftrightarrow$$

$$v = \frac{m_v g}{\alpha} + ce^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t}$$

Tilføjer vi begyndelsesbetingelsen $v(0) = 0$, finder man $c = -\frac{m_v g}{\alpha}$, som indsat i løsningen giver

(3.5) $$v = \frac{m_v g}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t})$$

Det ses, at hastigheden nærmer sig asymptotisk til $v_\infty = \frac{m_v g}{\alpha}$.
Halveringstiden for at opnå denne hastighed, findes på sædvanligvis som:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k} \quad og \quad k = \frac{\alpha}{m} \quad \Rightarrow \quad t_{\frac{1}{2}} = \frac{m\ln 2}{\alpha}\,.$$

For de fleste bevægelser i væsker opnås sluthastigheden meget hurtigt.

Ligningen (3.5) kan naturligvis integreres for at opnå strækningen x. Man finder:

(3.6) $$x = x_0 + \frac{m_v g}{\alpha}(t + \frac{m}{\alpha}(e^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t} - 1))$$

Hvis legemet har begyndelseshastigheden v_0 og bevægelsen er modsat rettet tyngden, skal der skiftes fortegn på *mg* leddet i (3.4) og $c = v_0 + \frac{m_V g}{\alpha}$.
Vi finder i dette tilfælde løsningen:

(3.7) $$v = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m} \cdot t} + \frac{m_V g}{\alpha}(e^{-\frac{\alpha}{m} \cdot t} - 1)$$

Vi ser at hastigheden igen nærmer sig asymptotisk til $v_\infty = -\frac{m_V g}{\alpha}$