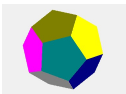
Radioaktive henfaldskæder

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk



Ole Witt-Hansen 2008

2. Radioaktive henfaldskæder

Differentialligningen for antallet af radioaktive kerner er kendt fra undervisningen:

(2.1) $$\frac{dN}{dt} = -kN$$

Som har løsningen

(2.2) $$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

Aktiviteten er defineret som antal sønderdelinger pr. sekund

(2.3) $$A(t) = -\frac{dN}{dt} = kN(t)$$

hvor k som sædvanlig betegner henfaldskonstanten (sønderdelingskonstanten).
Henfaldskonstanten k er lig med ln2 divideret med halveringstiden $T_{½}$, idet

$$\tfrac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-kT_{½}} \text{ giver: } k = \frac{\ln 2}{T_{½}}$$

Vi vil nu se på det tilfælde, hvor den oprindelige kerne henfalder til en ny kerne, som også er radioaktiv, noget der er velkendt for henfaldskæderne Uranserien-, Thorium- og Actinium serien.

Betegnes de to kerner med henholdsvis (1) og (2), kan man opstille to differentialligninger.
Den første for kerne (1), som er identisk med (2.1), mens den anden udtrykker, at kerne (2) produceres med en hastighed, der er lig med *aktiviteten* af kerne (1), og sønderdeles efter henfaldsloven.

(2.2) $$\frac{dN_1}{dt} = -k_1 N_1 \quad og \quad \frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} - k_2 N_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dN_2}{dt} = k_1 N_1 - k_2 N_2$$

Den sidste differentialligning er af formen:

(2.3) $$\frac{dy}{dx} = -ky + h(x)$$

Den løses ved at flytte leddet $-k \cdot y$ over på venstre side, multiplicere ligningen med e^{kx} og omskrive til en enkelt differentialkvotient:

(2.4) $$\frac{dy}{dx} = -ky + h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} e^{k\cdot x} + k e^{k\cdot x} y = h(x) e^{k\cdot x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(y e^{k\cdot x})}{dx} = h(x) e^{k\cdot x}$$

hvis $H(x) = \int h(x) e^{k\cdot x} dx$, så har differentialligningen løsningen:

(2.5) $$ye^{k\cdot x} = H(x) + c \quad \Leftrightarrow \quad y = H(x)e^{-k\cdot x} + ce^{-k\cdot x}$$

Konstanten *c* er som sædvanlig en integrationskonstant, der er bestemt af begyndelsesbetingelserne.
Erstatter man *x* med *t, y* med N_2 og $h(x)$ med $N_1(t)$ i (2.3) og foretages de samme omskrivninger med de nye variable finder man:

$$\frac{dN_2}{dt} = k_1N_1 - k_2N_2 \quad \wedge \quad N_1 = N_0e^{-k_1\cdot t} \quad \Rightarrow$$

$$e^{k_2\cdot t}\cdot\frac{dN_2}{dt} + k_2e^{k_2\cdot t}\cdot N_2 = k_1N_0e^{-k_1\cdot t}e^{k_2\cdot t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d(e^{k_2\cdot t}\cdot N_2)}{dt} = k_1N_0e^{(k_2-k_1)\cdot t} \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{k_2\cdot t}\cdot N_2 = N_0\frac{k_1}{k_2-k_1}e^{(k_2-k_1)\cdot t} + c \quad \Leftrightarrow$$

$$N_2 = N_2(t) = N_0\frac{k_1}{k_2-k_1}e^{-k_1\cdot t} + ce^{-k_2\cdot t}$$

Konstanten *c* bestemmes ved: $N_2(0)=0$ => $c = -N_0\frac{k_1}{k_2-k_1}$. Løsningen bliver herefter:

$$N_2(t) = N_0\frac{k_1}{k_2-k_1}e^{-k_1\cdot t} - N_0\frac{k_1}{k_2-k_1}e^{-k_2\cdot t} \quad \Leftrightarrow$$

(2.6)

$$N_2(t) = N_0\frac{k_1}{k_2-k_1}(e^{(k_2-k_1)\cdot t} - 1)e^{-k_2\cdot t}$$

Bemærk, at $N_2 > 0$ for $t > 0$, uafhængig af om $k_2 > k_1$ eller omvendt. (Tilfældet $k_2 = k_1$, har kun matematisk interesse, men løsningen er $N_2 = k_1N_0te^{-k_2\cdot t}$).

Resultatet er imidletid relativt let at fortolke, idet de første to faktorer er det antal N_1 kerner, der er henfaldet til N_2 kerner, men som ikke er henfaldet endnu, og den sidste faktor er henfaldsloven for N_2 kerner.

Hvis henfaldskæden er længere en tre kerner, kan det i princippet løses helt på den samme måde, idet man blot skal erstatte udtrykket for $N_1(t)$ med udtrykket for $N_2(t)$ i differentialligningen for $N_3(t)$.
Løsninger af typen (2.6) kan anvendes til aldersbestemmelse for et radioaktivt stof.
I praksis kender man de to sønderdelingskonstanter k_1 og k_2 samt forholdet mellem de to kerner N_2/N_1. Dette giver følgende ligning, fra hvilken man i princippet kan bestemme den tid, der er forløbet siden kernerne (1) blev skabt.

Denne slags beregninger har givet de første troværdige beregninger af jordens faktiske alder

(2.7) $$\frac{N_2}{N_1} = \frac{N_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1}(e^{(k_2-k_1)t} - 1)e^{-k_2 t}}{N_0 e^{-k_1 t}} = \frac{k_1}{k_2 - k_1}(1 - e^{(k_1-k_2)t})$$

Man ser, at hvis: $k_2 \;>\; k_1$, så vil $\frac{N_2}{N_1} \to \frac{k_1}{k_2 - k_1} \;\; for \;\; t \to \infty$