

## KAP. VII PARTIKLER, BØLGER OG STRÅLING.

### 1. FOTONENS PARTIKELNATUR.

Ved omtalen af den fotoelektriske effekt, har vi set, at lys under visse omstændigheder opfører sig som om det bestod af partikler (fotoner med energi  $E_{\text{foton}} = h\nu$ , hvor  $\nu$  er frekvensen af det pågældende lys. Vi vil i dette afsnit, på grundlag af relativitetsteorien drage nogle slutninger vedrørende fotonernes masse og bevægelsesmængde (impuls).

Da fotonerne bevæger sig med lysets hastighed  $c$ , må deres hvilemasse nødvendigvis være nul. Dette følger af den relativistiske formel:

$$(1.1) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad m_0 = m \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Da  $1 - v^2/c^2 = 0$  for fotonen, følger det af det andet udtryk i (1.1) at også  $m_0$  er nul.

For at finde et udtryk for fotonens impuls  $p$ , tager vi udgangspunkt i den relativistiske formel.

$$(1.2) \quad E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Indsætter man her  $m_0 = 0$  følger det at  $p = \frac{E}{c}$ . Fotonens impuls kan herefter skrives på følgende forskellige måder,

$$(1.3) \quad p = \frac{E}{c} \Leftrightarrow p = \frac{h\nu}{c} \Leftrightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

For at opnå det sidste udtryk har vi anvendt at  $c = \lambda \cdot \nu$ .

Selv om fotonens hvilemasse er nul, tildeler man ofte fotonen en ækvivalent masse  $m$ , idet man anvender Einsteins ligning:  $E = mc^2$

$$(1.4) \quad h\nu = mc^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{p}{c}$$

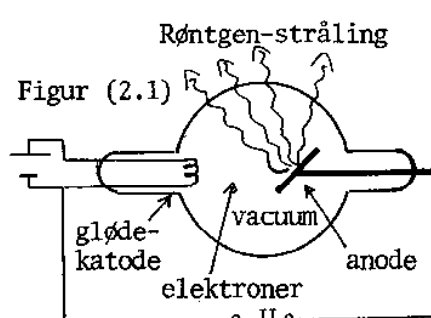
Vi noterer os, at ovenstående er i overensstemmelse med, at man udregner impulsen som masse gange hastighed,  $p = mc$

Kap VII

2. RØNTGENSTRÅLING.

I 1895 iagttog Røntgen, at der fra anoden på et udladningsrør blev udsendt en gennemtrængende stråling. Forsøget krævede, at røret arbejdede med højspænding mere end 10 kV.

Hvad Røntgen iagttog var, at et fluorescerende plade anbragt i nærheden af udladningsrøret lyste op. Røntgen konkluderede, at der fra anoden blev udsendt en stråling, der var i stand til at gennemtrænge udladningsrørets glasvæg. Yderligere forsøg viste, at strålingen kunne gennemtrænge papir og flere andre ugenomsigtige stoffer. På den anden side blev strålingens intensitet svækket betydeligt af en tyk klar glasplade. Strålingen kaldes for Røntgen-stråling, mens den engelske betegnelse er x-rays, fordi man i begyndelsen ikke var klar over strålingens natur.



På figur (2.1) er vist den principielle indretning af et Røntgen-rør. I røret er der højvacuum. Fra glødekathoden udsendes elektroner, der accelereres ned mod anoden. Benytter man en accelerations-spænding på f.eks. 50 kV, vil elektronerne have en

energi på 50 keV, når de rammer anoden. Ved sammenstødet med anoden vil elektronerne blive voldsomt nedbremsset (accelereret), og ifølge den klassiske elektricitetslære vil dette ske under udsendelse af elektromagnetisk stråling.

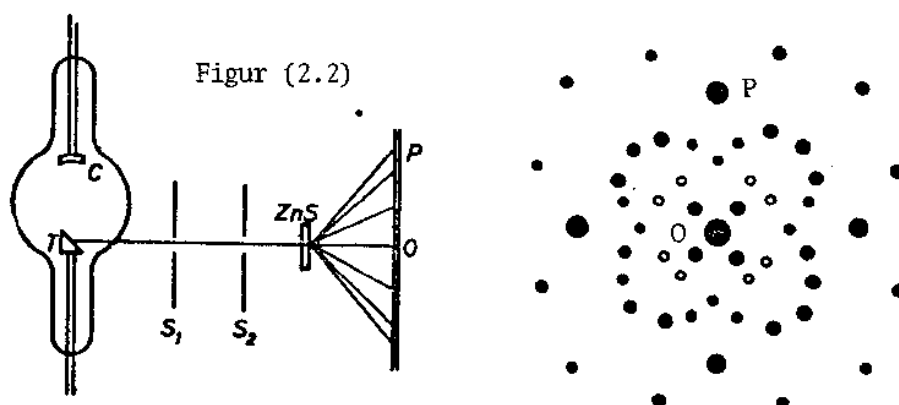
Lige fra Røntgen-strålingens opdagelse var det derfor naturligt, at antage, at det drejede sig om elektromagnetisk stråling.

De første forsøg på at bestemme bølgelængden af strålingen ved hjælp af prismer eller optiske gitre viste imidlertid ingen afbøjning. Forsøgenes negative resultat blev tolket derhen, at hvis Røntgen-strålingen var elektromagnetisk stråling, måtte bølgelængderne være uhyre korte, mindre end 1 nm.

Fremstilling af streggitre til så korte bølgelængder er umuligt, men den tyske fysiker Von Laue foreslog, at man i stedet for streggitre kunne anvende atomernes krystalgitre som rumlige gitre til

PARTIKLER BØLGER OG STRÅLING

interferensforsøg med røntgen-stråler. Et forsøg på at bestemme bøl-  
gelængden på denne måde blev udført af Friedrich og Knipping i 1913.  
Forsøgets skematiske opstilling er vist nedenfor. Ved hjælp af et  
par bly-skærme  $S_1$  og  $S_2$  blev der afgrænset et snævert strålebunt,  
som blev sendt gennem et tyndt krystal af ZnS. Efter passage af  
krystallen ramte de udgående stråler en fotografisk plade.  
Efter fremkaldning viste en plet, hvor strålen havde ramt, men des-  
uden rundt om denne i et regelmæssigt mønster, svagere pletter der  
viste, at den indfaldende stråle var blevet spredt, og ved interfe-  
rens i krystallen forstærket i bestemte retninger. (Se figuren).



Ud fra interferensmønsteret kunne Von Laue vise, at der i den an-  
vendte stråling måtte være bølgelængder i området 0,01 - 0,1 nm.

3. BRAGG-BETINGELSEN. RØNTGEN-SPEKTRET.

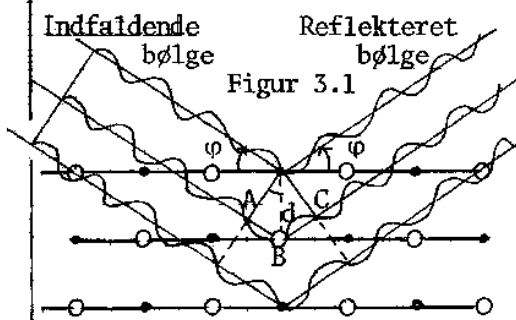
De interferensmønstre, der iagttages ved transmission gennem en kry-  
stal er ganske komplicerede at analysere. Kort efter Von Laues op-  
dagelser, foreslog englænderen Bragg, at den reflekterede stråling  
fra et krystal, ville være lettere at analysere end den transmittet-  
rede.

Når røntgen-stråling falder ind mod en krystal, vil de enkelte ato-  
mer virke som spredere, og den spredte bølge kan konstrueres ved at  
antage, at der udgår kuglebølger fra alle sprederne, der så ifølge  
Huygens princip (ved superposition) bestemmer de nye bølgefronter.  
For en krystal som NaCl er forholdene særlig simple fordi krystal-

Kap VII

gitteret er kubisk. Gennem krystallen kan man lægge en række parallelle planer, der tilsammen indeholder alle krystallens atomer. Et sådant sæt kaldes Bragg-planer. Afstanden mellem planerne kaldes for gitterafstanden, og betegnes  $d$ .

Den indfaldende bølge vil spredes på en af Bragg-planerne, og ved interferens vil man få en transmitteret bølge med samme retning som den indfaldende, og en reflekteret bølge i en retning givet ved den almindelige refleksionslov. Pointen er nu den, at de reflekterede bølger fra de parallelle Bragg-planer i almindelighed ikke er i fase, og derfor vil udslukke hinanden. Kun for ganske bestemte indfaldsvinkler vil de reflekterede bølger fra de parallelle Bragg-planer være i fase, og kun i disse tilfælde vil man observere en reflekteret bølge. Vi vil nu udlede Bragg-betingelsen for en reflekteret



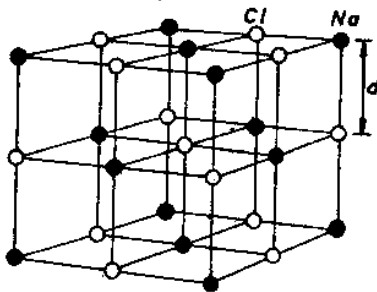
Figur 3.1

bølge. Figuren viser en plan røntgenbølge, der falder ind mod en kubisk krystal. Det fremgår af figuren, at betingelsen for at de reflekterede bølger fra to Bragg-planer er i fase, er at vejforskellen ABC er et helt antal bølgelængder. Kaldes strejfvinklingen med krystallen for  $\varphi$ , finder man Bragg-betingelsen.

$$(3.2) \quad |AB| + |BC| = n\lambda \Rightarrow$$

$$2d \sin\varphi = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

For et kubisk gitter, som f.eks. NaCl er det nemt at finde et udtryk for gitterafstanden  $d$ . På figuren nedenfor er vist hvorledes krystalgitteret er opbygget.



Det rumfang  $V$ , som svarer til hvert molekyle kan beregnes som  $V = \frac{M}{\rho N_A}$ , hvor  $M$  er molmassen,  $\rho$  er massefylden og  $N_A$  Avogadros tal. Da både Na<sup>+</sup> ionerne og Cl<sup>-</sup> ionerne fungerer som spre-

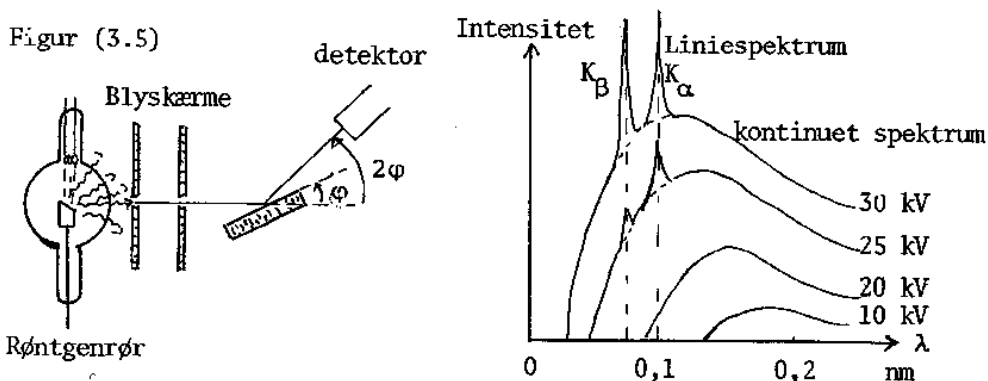
PARTIKLER BØLGER OG STRÅLING

dere for røntgenstrålingen, er rumfanget pr. spredning halvt så stort. Sættes dette rumfang lig med  $d^3$ , som er rumfanget af en kubus med kantlængde  $d$ , finder man følgende udtryk for Bragg-afstanden  $d$ .

$$(3.4) \quad d^3 = \frac{M}{2 \cdot \rho \cdot N_A} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{M}{2 \cdot \rho \cdot N_A}} \quad (d_{\text{NaCl}} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m})$$

Bragg-betingelsen (3.2) har været helt central for den såkaldte røntgenspektroskopi, hvor man bestemmer intensitetsfordelingen i røntgenstrålingen, som funktion af bølgelængden. Man kan anvende en opstilling, som skematisk er vist på figur (3.5).

Figur (3.5)



Ved hjælp af to blyskærme danner man en røntgenstråle med veldefineret retning. Strålen reflekteres på en drejelig krystal. Bølgelængden for den røntgenstråling, der reflekteres ud i vinklen  $\varphi$  kan beregnes af Bragg-betingelsen. Endelig består røntgen-spektroskopet af en detektor, der kan måle intensiteten af den stråling, der reflekteres ved vinklen  $\varphi$ .

Afsætter man intensiteten som funktion af bølgelængden  $\lambda$ , fremkommer kurver som vist på figur (3.6). Intensitetsfordelingen er stærkt afhængig af spændingen  $U$  over røret. Spektret er kontinuert; dog overlappet af et liniespektrum ved højere anodespændinger. Det kontinuerte spektrum er skarpt afgrænset af en mindste bølgelængde  $\lambda_{\text{min}}$ . Udregner man den tilsvarende frekvens  $\nu_{\text{max}} = c/\lambda_{\text{min}}$ , vil man finde, at der er streng proportionalitet mellem accelerationsspændingen  $U$  og  $\nu_{\text{max}}$ . Denne proportionalitet kan let forklares ud fra kvantehypotesen. Ved nedbremsningen af elektronen mod anodematerialet, vil der

## Kap VII

udsendes elektromagnetisk stråling i form af fotoner. Fotonerne kan højst få en energi svarende til, at elektronen afgiver hele sin energi i et eneste stød. Dette giver betingelsen:  $E_{\text{foton}} = E_{\text{elektron}}$

$$(3.7) \quad h\nu_{\text{max}} = U \cdot e \quad \rightarrow \quad \lambda_{\text{min}} = \frac{c}{\nu_{\text{max}}} = \frac{hc}{Ue}$$

Bølgelængden  $\lambda_{\text{min}}$  udregnet efter (3.7) viser sig at være helt i overensstemmelse med hvad man finder eksperimentelt. Det bemærkes, at man ud fra en klassisk beregning ikke vil finde noget minimum for bølgelængden.

Det kontinuerte spektrum fremkommer ved, at elektronerne nedbremses i flere mindre stød med anodematerialets atomer. Ved et sådant stød kan elektronen afgive energi ved at udsende en foton (bremsestråling). Disse fotoner udgør røntgen-strålingens kontinuerte spektrum.

Hovedparten af elektronernes energi afleveres dog som kinetisk energi til anodematerialets atomer. Dette bevirker, at anoden opvarmes.

Linie-spektret, der overlejrer det kontinuerte spektrum, kan forklares ud fra Bohrs atommodel. Man kan nemlig forestille sig, at en af de indkommende elektroner afleverer sin energi ved at støde en af de hårdt bundne elektroner ud af K-skallen i et af anodematerialets atomer. K-skallen fyldes da igen op ved, at en af de yderste elektroner falder ned i K-skallen, samtidig med at der udsendes en foton, hvis energi er givet ved Bohrs frekvensbetingelse:  $h\nu = E_i - E_j$ . For de tungere grundstoffer er dette energispring så stort, at de udsendte fotoner er i røntgen-området. Denne karakteristiske røntgenstråling ses som "linier" i røntgen-spektret.

Liniespektret afspejler beliggenheden af de laveste energiniveauer i anodematerialets atomer. Eksperimentelt finder man da også, at hvert anodemateriale har sit karakteristiske liniespektrum.

Røntgenstrålingen karakteriseres ofte ved sin hårdhed, idet en stor anodespænding giver en "hård" røntgenstråling, mens en lille anodespænding giver "blød" røntgenstråling. Strålingens gennemtrængelighed forøges med hårdheden.

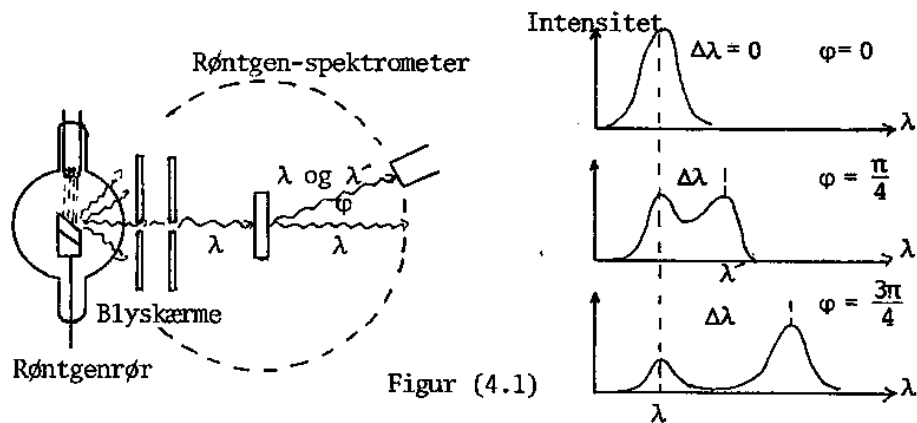
Ved røntgen-fotografering udnytter man stoffernes forskellige evne

PARTIKLER BØLGER OG STRÅLING

til at stoppe røntgenstrålingen. Ved at anbringe en fotografisk plade bag det gennemlyste objekt, vil man få et skyggebillede af de partier, som bremser strålingen mest. Som bekendt er røntgenfotografering blevet et af de mest anvendte hjælpemidler til at klarlægge f.eks. knoglelæsioner. I store doser er røntgenstråling farlig, idet strålingen ødelægger vævet. På dette område har strålingen dog også fået positiv anvendelse, idet man ved røntgenterapi ødelægger cancer-væv, hvor dette vanskelig kan fjernes ved en operation.

4. COMPTON-EFFEKTEN

Lader man en røntgen-stråle passere et ikke krystallinsk stof, vil strålingen spredes på stoffets atomer, og man vil på grund af atomernes tilfældige placering iagttage spredt røntgenstråling i alle retninger. A. H. Compton lavede i 1923 et forsøg, der viste, at en oprindelig monokromatisk røntgenstråle (d.v.s. med kun én bølgelængde) efter at være spredt en vinkel  $\varphi$  bestod af to komponenter, hvoraf den ene havde uforandret bølgelængde, mens den anden viste en bølgelængdeforøgelse. Denne opsplitning kaldes for Compton-effekten. Forskellen  $\Delta\lambda$  i de to komponents bølgelængde viste sig iøvrigt at vokse systematisk med spredningsvinklen  $\varphi$ . Nedenfor er vist en skematisk opstilling til påvisning af Compton-effekten samt nogle grafer af røntgenspektret ved forskellige spredningsvinkler.

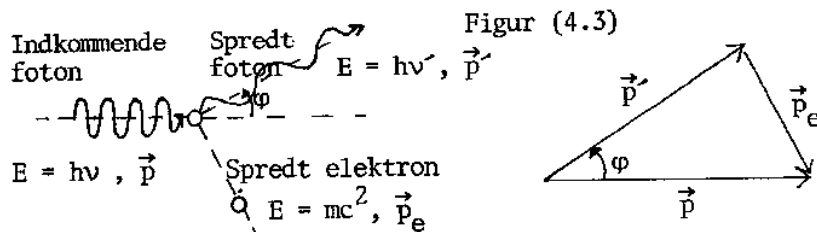


Figur (4.1)

Kap VII

Compton-effekten kan ikke forklares ud fra den klassiske elektromagnetisme. At elektromagnetisk stråling bliver spredt ved passage af et stof, er at forvente, men ændringen af bølgelængden er uforklarlig. Compton viste imidlertid, at effekten kan forklares ud fra kvantehypotesen.

Opfatter man nemlig den indkommende stråling som en strøm af fotoner, kan man vise, at bølgelængdeforøgelsen svarer til den energi, som en foton mister ved et elastisk sammenstød med en elektron. Vi vil da vise, hvorledes bølgelængdeforøgelse kan bestemmes ud fra impuls- og energibevarelse (relativistisk) i et sådant stød.



Ovenfor er skematisk vist sammenstødet, hvor en foton med energi  $h\nu$  og impuls  $p = \frac{h}{\lambda}$  rammer en hvilende elektron med energi  $m_0c^2$ . Efter stødet, har fotonen energi  $h\nu'$  og impuls  $p' = \frac{h}{\lambda'}$ , mens elektronen har energi  $mc^2$  og impuls  $p_e$ .

For fotonen er sammenhængen mellem energien og impulsen givet ved relationen  $E = pc$ . For elektronen gælder den relativistiske formel  $E^2 - p_e^2c^2 = m_0^2c^4 \Leftrightarrow m^2c^4 - p_e^2c^2 = m_0^2c^4 \Leftrightarrow p_e^2 = m^2c^2 - m_0^2c^2$ . Energibevarelsen (relativistisk) ved stødet er udtrykt i ligningen:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2$$

Ved at dividere denne ligning med  $c$  og anvende at  $\frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda}$  fås:

$$(4.4) \quad \frac{h}{\lambda} + m_0c = \frac{h}{\lambda'} + mc \Rightarrow mc = m_0c + \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)$$

For stødet gælder endvidere impulsbevarelse. Denne kan udtrykkes ved impulstrekanter af vektorerne  $\vec{p}$ ,  $\vec{p}'$  og  $\vec{p}_e$ , som udtrykker at  $\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e$ . Spredningsvinklen  $\varphi$  er vinklen mellem  $\vec{p}$  og  $\vec{p}'$ . Se figuren ovenfor.



PARTIKLER BØLGER OG STRÅLING

Vi kvadrerer nu relationen  $\vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}'$ . Herved fås:

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\varphi \Rightarrow p_e^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2 \frac{h^2}{\lambda\lambda'} \cos\varphi$$

Indsætter man i denne ligning:  $p_e^2 = m^2 c^2 - m_0^2 c^2$  finder man:

$$(4.5) \quad m^2 c^2 = m_0^2 c^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2 \frac{h^2}{\lambda\lambda'} \cos\varphi$$

For at eliminere  $m^2 c^2$  kvadrerer man (4.4) Herved fås:

$$(4.6) \quad m^2 c^2 = m_0^2 c^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2 \frac{h^2}{\lambda\lambda'} + 2m_0 c \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)$$

Ved at subtrahere (4.5) fra (4.6), ser man at der må gælde:

$$2m_0 c \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right) = 2 \frac{h^2}{\lambda\lambda'} (1 - \cos\varphi)$$

Ved at sætte på fælles brøkstreg på venstre side og bortforkorte, finder man endelig et udtryk for bølgelængde-ændringen  $\Delta\lambda$ .

$$(4.7) \quad \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\varphi)$$

Indsætter man elektronens masse for  $m_0$ , finder man, at  $\frac{h}{m_0 c} = 2,4 \text{ pm}$ . Dette kaldes for elektronens Comptonbølgelængde.

Som det fremgår af (4.7) vokser  $\Delta\lambda$  med spredningsvinklen  $\varphi$  og når sin største værdi, når  $\varphi = \pi$ .

Efter (4.7) skulle man forvente, at alle spredte fotoner fik en bølgelængdeforøgelse. Når dette alligevel ikke er tilfældet, kan det forklares ved, at når bølgelængde-ændringen ikke optræder, har fotonen stødt mod en af de hårdt bundne elektroner i atomet. Dette vil svare til, at fotonen er stødt sammen med atomet som helhed, og ved beregningen af bølgelængdeformindskelsen i Comptoneffekten skal man indsætte atomets masse i stedet for  $m_0$ . I dette tilfælde bliver Comptonbølgelængden dog flere tusinde gange mindre, og Comptoneffekten forsvinder.

Kap VII

5. PARTIKELBØLGER

Lysets partikelegenskaber var, som tidligere omtalt, allerede blevet opdaget og eksperimentelt fastslået med den fotoelektriske effekt. Ca. 20 år efter i 1924 fremkom den franske fysiker de Broglie med den hypotese, at det ikke kun var fotonerne, men alle atomare partikler der havde såvel partikel- som bølgeegenskaber. Efter denne hypotese skulle f.eks. elektronstråler udvise bølgeegenskaber, der principielt skulle kunne iagttages ved interferensforsøg.

For en foton, har vi set, at der gælder relationen:  $p = \frac{h}{\lambda}$ . de Broglie antog nu, at der galdt en lignende relation for alle atomare partikler, således at man til en partikel med impuls  $p$  kunne tilordne en bølgelængde  $\lambda$  efter formlen:

$$(5.1) \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{h}{p} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{h}{mv}$$

Bølgelængden for en partikel udregnet efter (5.1) kaldes for de Broglie bølgelængden.

5.2 Eksempel: For en elektron med en energi på 100 eV, finder man impulsen  $p$  og dermed de Broglie-bølgelængden af ligningerne:

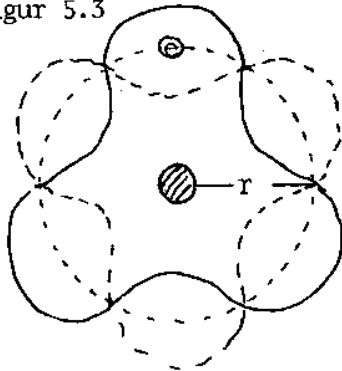
$$\frac{1}{2}mv^2 = E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p^2}{2m} = E \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2mE} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

Indsætter man  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  og  $E = 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ J}$  finder man en de Broglie bølgelængde på  $\lambda = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . Dette svarer omtrent til den dobbelte Bohr radius for brintatomet, og er af den samme størrelsesorden som Røntgenstråling. I princippet skulle det altså være muligt, at bestemme de Broglie bølgelængden for elektroner på samme måde, som Bragg bestemte bølgelængden for røntgenstrålingen.

Der var naturligvis en bestemt ide med at indføre en bølgelængde for partikler. Ifølge de Broglie, skulle de stationære energitilstande i atomerne (som indført af Bohr) svare til stående elektronbølger. Ved hjælp af denne antagelse, kunne de Broglie nemlig på simpel måde redegøre for Bohrs kvantiseringsbetingelse for impulsmomentet (10.2)

PARTIKLER BØLGER OG STRÅLING

Figur 5.3



ifølge hvilket at  $L = n\hbar$ ,  $n = 1, 2, 3..$   
 På figuren er vist, hvorledes de Broglie opfattede elektronens cirkelbevægelse om kernen, som en stående (ring)bølge. De mulige stationære tilstande, skulle da svare til at den stående bølge opfyldte en randbetingelse. Som det fremgår af figuren, må denne randbetingelse være, at cirkelbanens omkreds er et helt antal de Broglie bølgelængder.

Er radius i cirkelbanen  $r$ , giver dette betingelsen:

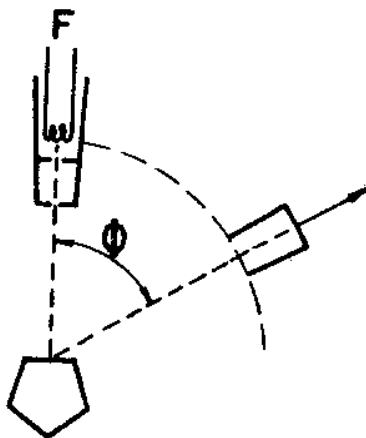
$$(5.4) \quad 2\pi r = n\lambda \quad \wedge \quad \lambda = \frac{h}{mv} \quad \Rightarrow \quad 2\pi r = n \frac{h}{mv} \quad \Leftrightarrow$$

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad , \quad n = 1, 2, 3... \quad \Rightarrow \quad L = n\hbar \quad , \quad n = 1, 2, 3..$$

Man ser at hypotesen om de Broglie bølgelængde fører til Bohrs kvantiseringsbetingelse for impulsmomentet, som for brintatomet giver de korrekte energitilstande.

På trods af dette (og andre) resultater, fæstnede man i begyndelsen ringe tillid til de Broglies partikel-bølge teori. Teorien blev imidlertid direkte bekræftet ved et berømt interferensforsøg med elektroner, udført af Davidson og Germer i 1927.

Forsøgsopstillingen er vist på figur (5.5). Elektronerne bliver udsendt fra glødetråden F, og accelereret gennem en spændingsforskel på ca. 100 V. Elektronstrålen falder vinkelret ind på en nikkel-kry-

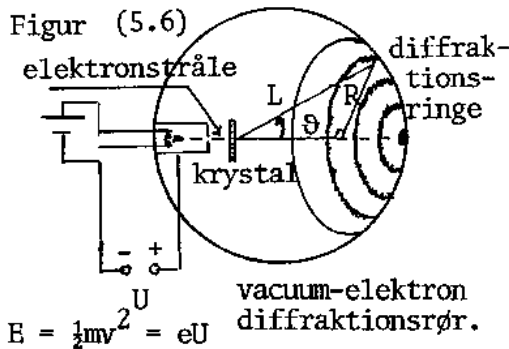


stal, hvor elektronerne spredes i alle retninger. Ved hjælp af et Faraday-bæger (som kan måle den opsamlede ladning) kan man udmåle intensiteten af den spredte stråling i alle retninger.

Forsøget viser nu, at der i visse retninger er strålingsmaxima og

Kap VII

minima. Endvidere kunne Davidson og Germer vise, at de observerede maxima var i overensstemmelse med Bragg-betingelsen:  $2d\sin\phi = n\lambda$ , når man for  $\lambda$  indsatte elektronernes de Broglie bølgelængde.



De Broglie bølgelængden for elektronerne kan også bestemmes eksperimentelt ved at lade elektronstrålen passere gennem en tynd krystal. Se figur (5.6). Anbringer man en fotografisk plade eller en fluorescerende skærm på den anden side af krystallen, vil man

iagttage en række af koncentriske ringe. Opfatter man krystallen som et to-dimensionalt streggitter, kan radius i cirklerne beregnes som afbøjningsvinklen svarende til et almindeligt streggitter med gitterkonstant  $d$ . Med figurens betegnelser finder man således:

$$(5.7) \quad d \sin\phi = n\lambda \text{ (gitterligning)} \wedge \sin\phi = \frac{R}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{d \cdot R}{L \cdot n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

I (5.7) er bølgelængden for elektronerne bestemt eksperimentelt ud fra et interferensforsøg. Bølgelængden kan imidlertid (ligesom i eksempel 5.2) også bestemmes ud fra de Broglies formel:  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ , når elektronernes energi er kendt. Ved sammenligning med (5.7) finder man god overensstemmelse, hvilket bekræfter de Broglies teori.

Den kendsgerning, at atomare partikler udviser bølgeegenskaber og at elektromagnetisk stråling udviser partikelegenskaber, kaldes for partikel-bølge dualiteten. Atomare fænomener har tilsyneladende både en partikel og en bølgebeskrivelse. Dette var en meget overraskende og efter klassiske forestillinger uforståelig konsekvens af de mange forsøg, der blev udført i begyndelsen af 1900-tallet. I fysikken er det imidlertid ikke altid en teori's "grad af forståelighed", der er afgørende, men derimod kun teoriens overensstemmelse med de eksperimentelle erfaringer, og evne til at forudsige resultatet af nye forsøg.

PARTIKLER BØLGER OG STRÅLING

Både de Broglies bølgemodel og Bohrs partikel-model for atomet havde helt sikkert korrekte elementer i sig, men begge teorier er ufuldstændige, og indtil slutningen af 1920'erne manglede man den teori, der knyttede sammenhængen mellem bølgebeskrivelsen og partikelbeskrivelsen.

6. FASE OG GRUPPEHASTIGHED. HEISENBERGS USIKKERHEDSRELATIONER

Vi vil her diskutere nogle simple eksempler på partikelbølger, og udlede nogle væsentlige konsekvenser af partikel-bølge dualiteten. Vi starter med at bemærke, at når man går over til en bølgebeskrivelse af elektronens bevægelse om kernen, så mister man enhver forstilling om elektronens position i cirkelbevægelsen. Til gengæld er impulsmomentet, og dermed impulsen af elektronen fuldstændig fastlagt. Det viser sig at være en fundamental konsekvens af partikel-bølge dualiteten, at søger man at fastlægge en partikels impuls præcist, er man henvist til en bølgebeskrivelse, og samtidig mister man fuldstændig betydningen af "partiklens" position. Omvendt, hvis man søger at fastlægge positionen nøjagtigt, er impulsen helt udefineret.

Impuls og position er, - med et udtryk, der skyldes Bohr -, komplementære. De kan ikke begge fastlægges samtidig med vilkårlig præcision. Dette vil vi se lidt nærmere på.

Vi betragter først en superposition af to harmoniske (partikel) bølger med samme amplitude, men med lidt forskellige vinkelfrekvenser og bølgetal.  $u_1(x,t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x)$  og  $u_2(x,t) = A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$

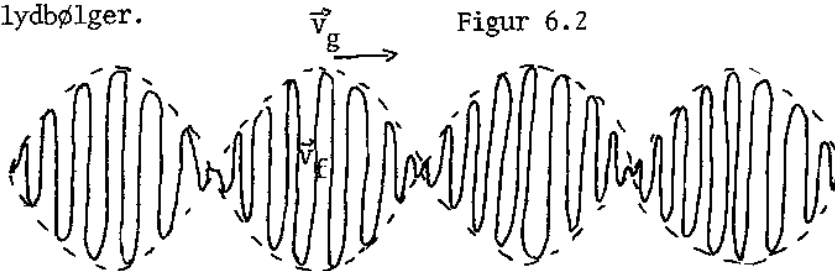
$$\begin{aligned}
 (6.1) \quad u(x,t) &= A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x) \\
 &= 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{k_2 + k_1}{2} x\right) \\
 &= 2A \cos\left(\frac{1}{2} \Delta \omega t - \frac{1}{2} \Delta k x\right) \cos(\omega t - k x)
 \end{aligned}$$

Ved omskrivningerne i (6.1) har vi anvendt de logaritmiske formler for addition af to cos-funktioner, og endvidere har vi sat  $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$ ,  $\Delta k = k_2 - k_1$ ,  $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$  og  $k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

Kap VII

Vi ser, at man kan opfatte superpositionen (6.1) som en plan harmonisk bølge, der udbreder sig med fasehastigheden  $v_f = \frac{\omega}{k}$ . (Dette udtryk fås ved at følge et punkt med konstant fase i den anden cos-funktion, f.eks.  $\omega t - kx = 0 \Rightarrow v_f = \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k}$ ). Men samtidig har bølgen en amplitude  $2A \cos(\frac{1}{2}\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta k x)$ , som varierer med tiden, men med en meget langsommere frekvens. Følger man et punkt, hvor amplituden er maximal, f.eks. givet ved at  $\frac{1}{2}\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta k x = 0$ , finder man den såkaldte gruppehastighed:  $v_g = \frac{x}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ . Er  $\omega$  givet som en funktion af  $k$ ;  $\omega = \omega(k)$  kan man for små tilvækster identificere gruppehastigheden med differentialkvotienten:  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ .

Nedenfor har vi skitseret, hvorledes bølgefunktionen (6.1) ser ud. Vi har tidligere set en sådan bølgeform, ved omtalen af stødfrekvens for lydbølger.



Den stiplede linie angiver amplitudens variation. Det er denne form, der udbreder sig med gruppehastigheden  $v_g$ , mens faserne i svingningerne udbreder sig med  $v_f$ . Vi konkluderer, at en superposition af bølger normalt er karakteriseret af både en fase- og en gruppehastighed. Den observerbare hastighed er gruppehastigheden, da dette svarer til at følge et punkt med konstant amplitude. Hvis  $\omega = \omega(k)$  gælder der:

$$(6.3) \quad v_f = \frac{\omega}{k} \text{ (fasehastighed)} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} \text{ (gruppehastighed)}$$

Hvis udbredelseshastigheden ikke afhænger af frekvensen, (som det jo f.eks. er tilfældet med lydbølger, hvor  $\omega = v \cdot k$  og  $v = \text{konstant}$ ), er gruppehastigheden lig med fasehastigheden.

For en partikel gælder ifølge de Broglie:  $E = \hbar \omega$  og  $p = \hbar k$ .

Fase- og gruppehastigheden kan derfor udregnes som  $v_f = \frac{E}{p}$  og  $v_g = \frac{dE}{dp}$ . For en urelativistisk partikel er  $E = p^2/2m$ , og vi finder:  $v_f = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{1}{2}v$ , mens  $v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v$  (partiklens hastighed).

PARTIKLER BØLGER OG STRÅLING

Det er klart, at beskriver man en atomar partikel, eller en strøm af sådanne partikler med en harmonisk bølge, er partiklernes sted fuldstændig ubekendt. Til gengæld er partiklernes impuls fuldstændig fastlagt. Dette følger, hvis man udregner impulsen  $p$  af de Broglie relationen:  $p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow p = h \frac{k}{2\pi} = \hbar k$ , hvor  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  betegner bølgetallet, der er præcist fastlagt for en plan harmonisk bølge.

Vil man opnå kendskab til partiklens sted, må man beskrive den med en "puls", en såkaldt bølgepakke eller bølgetog, der har en endelig rumlig udstrækning. Partiklens position skal så identificeres med bølgepakkens position. Vi forsøger os med en superposition af harmoniske bølger, der har bølgetal mellem værdierne  $k_1$  og  $k_2$ . Skal vi superponere bølger med alle bølgetal mellem disse to værdier, kan det gøres ved at udregne integralet:

$$(6.4) \quad u(x, t) = \int_{k_1}^{k_2} A \cos(\omega t - kx) dk$$

Vi antager nu, at  $\omega = \omega(k)$ . Hvis intervallet  $[k_1, k_2]$  ikke er alt for stort, kan vi med god tilnærmelse antage at  $\omega$  er en lineær funktion af  $k$ , således at  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  er konstant. I dette tilfælde kan vi udregne integralet.

$$(6.5) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{A}{\frac{d\omega}{dk} t - x} \left[ \sin(\omega t - kx) \right]_{k_1}^{k_2} \\ &= \frac{A}{\frac{d\omega}{dk} t - x} ( \sin(\omega_2 t - k_2 x) - \sin(\omega_1 t - k_1 x) ) \\ &= \frac{2A \sin(\frac{1}{2}\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta k x)}{\frac{d\omega}{dk} t - x} \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{k_2 + k_1}{2} x) \\ &= \frac{2A \sin(\frac{1}{2}\Delta k (\frac{\Delta\omega}{\Delta k} t - x))}{\frac{d\omega}{dk} t - x} \cos(\omega t - kx) \end{aligned}$$

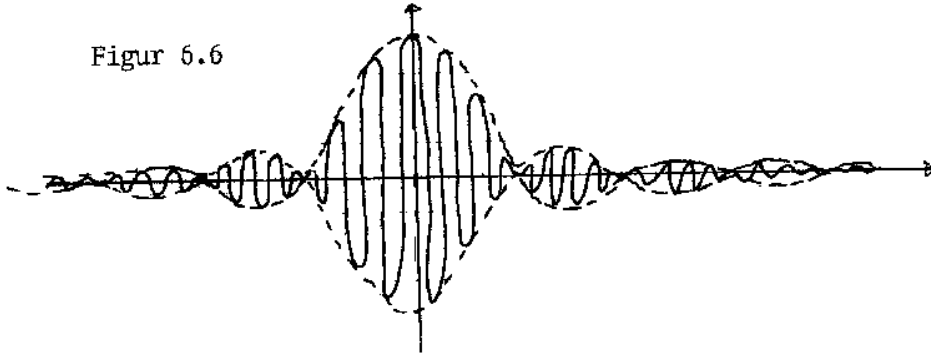
Som ved superpositionen af de to harmoniske bølger, opfatter vi (6.5) som en harmonisk bølge med en tidsafhængig amplitude.

For at forstå amplitudens variation, bemærker vi om funktionen  $\frac{\sin kx}{x}$ , at  $\frac{\sin kx}{x} \rightarrow k$  for  $x \rightarrow 0$ , og at funktionen kun i det væsentlige er forskellig fra 0 i intervallet  $-\pi \leq kx \leq \pi$ .

Kap VII

Om superpositionen (6.5) kan da bemærkes følgende: Når  $\omega$  er en lineær funktion af  $k$ , kan vi identificere  $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$  med gruppehastigheden  $\frac{d\omega}{dk}$ , og bølgepakken er i det væsentlige kun forskellig fra 0 i intervallet:  $-\pi \leq \frac{1}{2}\Delta k(\frac{d\omega}{dk}t - x) \leq \pi$ . Maximum for amplituden bevæger sig med gruppehastigheden bestemt ved at nævneren  $\frac{d\omega}{dk}t - x = 0 \Rightarrow v_g = \frac{x}{t} = \frac{d\omega}{dk}$ . Nedenfor er skitseret bølgepakkens udseende til tidspunktet  $t = 0$ .

Figur 6.6



For at bestemme den rumlige udstrækning af bølgepakken, betragter vi den til tidspunktet  $t = 0$ . Til dette tidspunkt er bølgepakken kun i det væsentlige forskellig fra nul i intervallet:  $-\pi \leq \frac{1}{2}\Delta kx \leq \pi$   $-\frac{2\pi}{\Delta k} \leq x \leq \frac{2\pi}{\Delta k}$ . Skal man derfor vurdere ubestemtheden  $\Delta x$  i en partikels position, når den er beskrevet ved bølgepakken ovenfor, må der gælde:  $\Delta x \geq \frac{2\pi}{\Delta k} \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta k \geq 2\pi$ .  $\Delta k$  kan også opfattes som en ubestemthed på bølgepakkens bølgetal, og dette giver anledning til en ubestemthed på bølgepakkens (partiklens) impuls, som kan udregnes af de Broglies relation:  $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \Rightarrow \Delta p = \hbar \Delta k$ . Man finder således:

$$(6.7) \quad \Delta x \cdot \Delta k \geq 2\pi \Leftrightarrow \hbar \Delta k \cdot \Delta x \geq 2\pi \hbar \Leftrightarrow \Delta p \cdot \Delta x \geq h$$

Den sidste af ligningerne (6.7) er Heisenbergs berømte usikkerhedsrelation. Den udtrykker, at det i en partikel-bølge beskrivelse er umuligt samtidigt at bestemme en partikels impuls og position med vilkårlig nøjagtighed. Impuls og position kan kun bestemmes således at produktet af ubestemthederne  $\Delta x$  og  $\Delta p$  overstiger  $h$ .

Man kunne tro, at relationen vi har udledt i (6.7) var ret vilkårlig og baseret på vores valg af bølgefunktion. Det viser sig imidlertid at relationen er helt generel, og er en fundamental konsekvens af



## PARTIKLER BØLGER OG STRÅLING

partikel-bølge dualiteten.

Det er klart, at beskrivelsen af en partikel med en bølgefunktion har nogle ejendommelige konsekvenser. Spørgsmålet er i alt væsentligt om man fuldstændig opgiver forestillingen om en partikel, som lokaliseret i et bestemt punkt. Dette problem er løst med den såkaldte sandsynlighedstolkning, ifølge hvilket kvadratet på bølgefunktionen skal fortolkes som en sandsynlighedstæthed for at finde partiklen i et bestemt punkt.

Sandsynlighedstolkningen af bølgemeknikken har imidlertid konsekvenser, der også ud fra et filosofisk synspunkt er bemærkelsesværdige. Vi er vant til fra mekanikken, at hvis vi kender en partikels position og impuls til et givet tidspunkt, og kender de kræfter, der påvirker partiklen, kan vi beregne partiklens position og impuls til ethvert senere tidspunkt, og dette med vilkårlig stor nøjagtighed. Dette er ikke længere tilfældet i bølgemeknikken. Her er en partikels tilstand givet ved en bølgefunktion  $\psi(\vec{x}, t)$ .  $|\psi(\vec{x}, t)|^2 dV$  angiver sandsynligheden for at finde partiklen i rumfanget  $dV$ . På en tilsvarende måde (som vi ikke skal gøre rede for) kan man udregne sandsynligheden for at partiklen har en impuls i intervallet  $d^3\vec{p} = dp_x dp_y dp_z$ . I bølgemeknikken er man tvunget til at opgive den klassiske mekaniks determinisme, ifølge hvilket man med vilkårlig nøjagtighed kan forudsige et systems tilstand i al fremtid, blot begyndelsesbetingelserne er fastlagt. I bølgemeknikken kan man højst sige, at et system med en vis sandsynlighed vil befinde sig i en bestemt tilstand i fremtiden, men forskellige systemer, startet med samme begyndelsesbetingelser kan godt befinde sig i forskellige tilstande efter et vist tidsrum. Dette kaldes for indeterminismen i kvantemekanikken. Indeterminismen har (især blandt ikke-fysikere) været genstand for overfortolkning. Man har her set et bevis på, at man i fysikken, selv med en forøget informationsmængde, principielt ikke vil være i stand til at forudsige "fremtiden". Den nærliggende konklusion, at fremtiden stadig "er i vorherres hænder" er nok meget ude af trit med en fysikers syn på denne sag. Kendsgerningen er jo at bølgemeknikken er en meget præcis matematisk formalisme, ud fra

Kap VII

hvilken man kan beregne forskellige sandsynligheder for et systems udvikling i fremtiden. Denne præcise sandsynlighedstolkning udelukker jo netop, hvad man forstår ved en højere styring. "Hvis Vorherre bestemmer vores fremtid, spiller han i hvert fald "terninger" med den, som det noget polemisk kan formuleres. Der er intet i kvantemekanikken, som kan underbygge en metafysisk (religiøs) opfattelse.

Vi vil afrunde dette kapitel med at anføre den differentiaalligning, der dirigerer udviklingen af en bølgefunktion, og ud fra hvilken man principielt kan beregne bølgefunktionen for et vilkårligt system, når potentialerne (kræfterne) er kendte. Ligningen kaldes, som før omtalt for Schrödinger-ligningen, op blev fremsat første gang af den tyske fysiker K.E. Schrödinger i 1928, som en naturlig følge af de teorier, der var fremsat især af Bohr, de Broglie, Heisenberg m.fl. Den matematiske formalisme, der ligger til grund for Schrödinger-ligningen, går langt ud over hvad man lærer i gymnasiet. (Et normalt kursus i kvantemekanik overstiger i omfang hele gymnasiets pensum i fysik). Vi har således ingen egentlig mulighed for at forklare og fortolke ligningen, men den nævnes kun for fuldstændighedens skyld.

En partikel, der bevæger sig i et potential  $V(\vec{x}, t)$  er beskrevet ved en bølgefunktion  $\psi(\vec{x}, t)$ . Sandsynligheden for at partiklen befinder sig i rumfangselementet  $dV = dx dy dz$  til tidspunktet  $t$  er givet ved kvadratet på bølgefunktionen  $|\psi(\vec{x}, t)|^2 dV$ . Impulsen på dette sted kan beregnes af operatoren  $i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  anvendt på bølgefunktionen. Energien kan beregnes ud fra operatoren  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  ( $i$  er den komplekse enhed  $\sqrt{-1}$ ). Bølgefunktionen kan beregnes ud fra Schrödinger-ligningen:

$$(6.8) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x, t) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$\nabla^2$  betyder Laplace-operatoren, idet  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Schrödinger-ligningen kan opfattes som grundligningen i den urelativistiske kvantemekanik. For den relativistiske kvantemekanik gælder Dirac-ligningen, men den er naturligvis langt mere kompliceret.