Partikelsystemers Dynamik
Massemidtpunkt og Impulssætningen

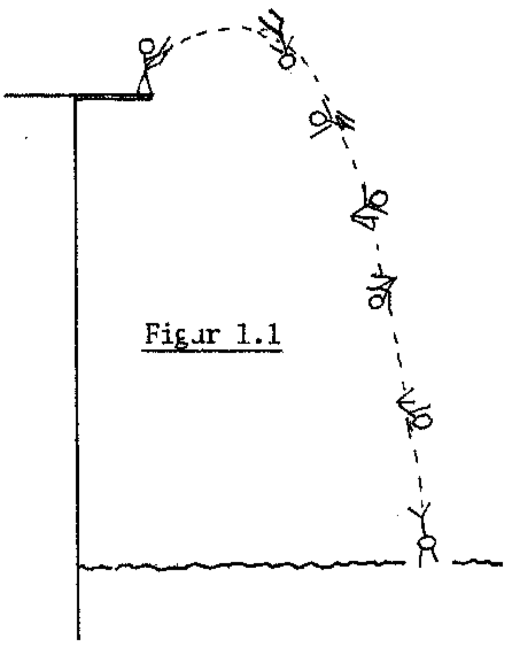
Ole Witt-Hansen 1979 (2016)

KAP. VII PARTIKELSYSTEMERS DYNAMIK

1. SYSTEM AF PARTIKLER. MASSEMIDTPUNKT.

Vi har hidtil næsten udelukkende beskæftiget os med den såkaldte partikel-mekanik, der beskriver bevægelsen af et legeme, der matematisk kan beskrives ved stedvektoren til et punkt. For udstrakte legemer har vi kun beskrevet bevægelser, hvor alle legemets punkter udfører den samme bevægelse, en såkaldt translation.
Vi vil nu beskrive partikelsystemer, hvor dette ikke er tilfældet. Dette kan enten være, fordi systemets enkelte dele bevæger sig relativt i forhold til hinanden under deres gensidige kraftpåvirkning eller, fordi systemet er et stift legeme, hvor de enkelte partikeldele er fixeret i forhold til hinanden, men udfører forskellige bevægelser. Dette vil f.eks. være tilfældet, når det stive legeme roterer om en fast akse.

Vi har set, at en partikel, der bevæger sig frit i tyngdefeltet, vil følge en parabelbane. For et sammensat system stiller sagen sig lidt anderledes.



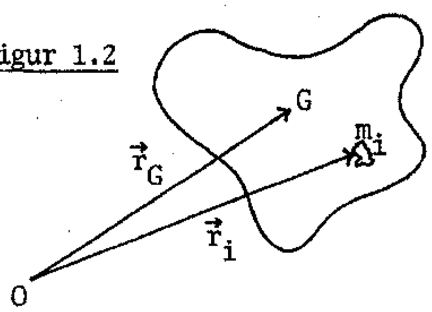
Figur 1.1

Tænker man f.eks. på en udspringer, der fra 10 m vippen udfører en dobbelt salto (med ½ skrue), er det umiddelbart indlysende, at ikke alle udspringerens dele vil følge en parabelbane.
Vi vil imidlertid vise, at "som helhed" vil udspringeren følge en parabelbane.
For at give en mere præcis formulering af det sidste udsagn, er det nødvendigt at indføre et nyt begreb, som kaldes for massemidtpunkt for et system af partikler.

Kap VII

Definitionen af massemidtpunkt er helt generel og omfatter både et system af adskilte partikler og et stift legeme, hvor partiklernes indbyrdes positioner er uforandret.

Figur 1.2



Legemet beskrives ud fra et begyndelsespunkt O. Stedvektoren til partikeldelen med massen m_i betegnes med $\vec{r}_i$. $m = \Sigma m_i$ er summen af partikeldelenes masser. Man definerer da et fiktivt punkt G, som kaldes for massemidtpunktet for systemet med masse m, ud fra ligningen:

(1.3) $$\overrightarrow{OG} = \vec{r}_G = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i$$

Summationen skal udstrækkes over alle legemets dele.
Ofte vil man se summationstegnet erstattet af et integral.

(1.4) $$\vec{r}_G = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,dm = \frac{1}{m}\int \vec{r}\rho\,dV$$

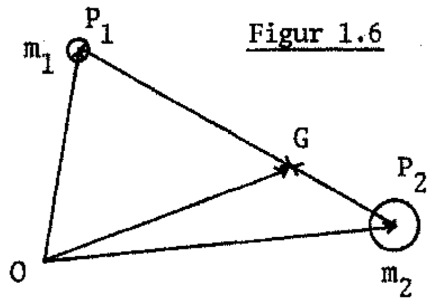
$\vec{r} = (x,y,z)$, $dV = dx\,dy\,dz$ og ρ er massefylden, således at $dm = \rho\,dV$
Massemidtpunktets tre koordinater findes da af ligningerne:

(1.5) $$x_G = \frac{1}{m}\int x\rho\,dV \qquad y_G = \frac{1}{m}\int y\rho\,dV \qquad z_G = \frac{1}{m}\int z\rho\,dV$$

Hvis et legeme har en symmetriakse eller en symmetriplan, ligger massemidtpunktet på denne akse eller i denne plan.
Hvis legemet har to ikke parallelle symmetriplaner, vil massemidtpunktet ligge på deres skæringslinie. Har legemet tre uafhængige symmetriplaner, er massemidtpunktet entydigt bestemt som deres skæringspunkt.
Massemidtpunktet af en retangulær kasse er således i diagonalernes skæringspunkt. Massemidtpunktet af en homogen kugle er i kuglens centrum. Massemidtpunktet for en plan trekant er i medianernes skæ-

ringspunkt.

1.6 Eksempel: *Som eksempel vil vi bestemme massemidtpunktet for et system bestående af to adskilte partikler med masser m_1 og m_2.*



Figur 1.6

Partiklerne tænkes placeret i punkterne P_1 og P_2.
Ifølge definitionen af massemidtpunkt gælder:

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1\vec{OP}_1 + m_2\vec{OP}_2) \Leftrightarrow$$

$$(m_1+m_2)\vec{OG} = m_1\vec{OP}_1 + m_2\vec{OP}_2 \Leftrightarrow$$

$$m_1(\vec{OG} - \vec{OP}_1) = -m_2(\vec{OG} - \vec{OP}_2) \Leftrightarrow m_1\vec{P_1G} = -m_2\vec{P_2G} \Rightarrow \frac{|P_1G|}{|P_2G|} = \frac{m_2}{m_1}$$

Af ovenstående fremgår, at massemidtpunktet er placeret på forbindelseslinien mellem de to masser, og at G deler liniestykket fra P_1 til P_2 i det omvendte masseforhold.
Man kan f.eks. anvende dette resultat til at udregne positionen af massemidtpunktet for systemet bestående af jorden og månen.
Forholdet $M_{måne}/M_{jord} = 0{,}0123$, og afstanden jord-måne er ca. $60\,R$, hvor R betegner jordradius. Hvis r_G er afstanden fra jordens centrum til massemidtpunktet G, må der gælde ifølge resultatet ovenfor:

$$\frac{r_G}{60\,R - r_G} = \frac{M_{måne}}{M_{jord}} = 0{,}0123 \Rightarrow r_G = 0{,}729\,R$$

Massemidtpunktet befinder sig altså inden for jordens overflade. Som følge af jorden og månens gensidige massetiltrækning, bevæger de sig begge i ellipsebaner om deres fælles massemidtpunkt. Månens tiltrækning vil således give anledning til mindre uregelmæssigheder i jordens bane omkring solen, de såkaldte pertubationer.

2. KRAFT OG IMPULS.

For et system af partikler defineres systemets impuls som vektorsummen af partiklernes impuls.

Kap VII

(2.1) $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \ \wedge \ \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$

Ved en translation har alle dellegemerne samme hastighed $\vec{v}$, så man i dette tilfælde finder: $\vec{p} = \Sigma\, m_i \vec{v} = (\Sigma\, m_i)\ \vec{v} = m\vec{v}$.
For en vilkårlig bevægelse, kan vi imidlertid opskrive en lignende relation ved anvendelse af massemidtpunktets hastighed $\vec{v}_G$.
Idet man anvender at $\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt$ og $\vec{v}_G = d\vec{r}_G/dt$, finder man ved at differentiere ligningen (1.3) på begge sider:

$$\frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_G = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i \ = \frac{1}{m} \sum_i \vec{p}_i$$

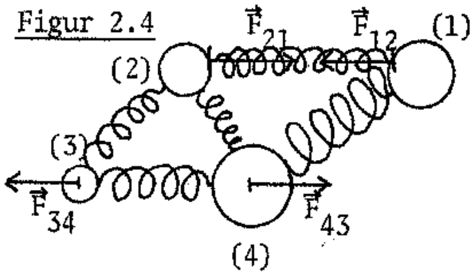
Det følger så:

(2.2) $\vec{v}_G = \frac{1}{m}\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p} = m\vec{v}_G}$

Partikelsystemets samlede impuls kan altså skrives som den samlede masse m gange massemidtpunktets hastighed $\vec{v}_G$.

Den resulterende kraft $\vec{F}_{res}$ på et system af partikler beregnes som vektorsummen af kræfterne $\vec{F}_i$, der virker på hver af systemets partikler med masserne m_i.
Vi opdeler nu kræfterne $\vec{F}_i$ i ydre kræfter $\vec{F}_{iy}$ og indre kræfter $\vec{F}_{ij}$
De ydre kræfter er de kræfter, som partiklen er påvirket af fra ydre kraftfelter, f.eks. tyngdefeltet eller elektriske felter, mens de indre kræfter er de kræfter, hvormed partiklerne gensidigt påvirker hinanden. $\vec{F}_{ij}$ skal således betyde den kraft, hvormed partiklen "i" er påvirket af partiklen "j".

Figur 2.4



(2.3) $\vec{F}_{res} = \sum_{ij} \vec{F}_{ij} \ + \ \sum_i \vec{F}_{iy}$

De indre kræfter vil imidlertid ikke give noget bidrag til summen, idet de parvis ophæver hinanden ifølge Newtons 3. lov.
På figuren er vist et eksempel

på et kraft-modkraft par. Ifølge Newtons 3. lov gælder der at,

$$\vec{F}_{34} = -\vec{F}_{43} \quad \text{og dermed summen} \quad \vec{F}_{34} + \vec{F}_{43} = 0$$

Da den første af summerne i (2.3) består af sådanne par, er denne sum lig med nul, og det er derfor kun de ydre kræfter, der bidrager til den resulterende kraft.

$$(2.5) \qquad \vec{F}_{res} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_{ij} \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_{iy} = \sum_i \vec{F}_{iy} = \vec{F}_{ydre}$$

For hver partikel gælder Newtons 2. lov: $\vec{F}_i = m_i d\vec{v}_i/dt$. Ved at summere over alle partiklerne, under anvendelse af (2.5) og (2.1) fås:

$$(2.6) \qquad \vec{F}_{ydre} = \vec{F}_{res} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{v}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Ifølge (2.2) gælder at $\vec{p} = m\vec{v}_G$, og man finder således den vigtige relation:

$$(2.7) \qquad \boxed{\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}_{ydre} = m\frac{d\vec{v}_G}{dt}}$$

Den sidste af ligningerne udtrykker Newtons 2. lov for et system af partikler.

Den resulterende ydre kraft på et system af partikler er lig med systemets masse gange massemidtpunktets acceleration.

Denne sætning implicerer, at massemidtpunktet for et system af partikler bevæger sig som en partikel med masse m og påvirket af den resulterende ydre kraft. Man omtaler da ofte massemidtpunktet som en fiktiv partikel, massemidtpunktspartiklen.

Hvis vi vender tilbage til eksemplet med udspringeren, der slår en dobbelt salto, kan vi konkludere, at hans bevægelse kan deles op i massemidtpunktets bevægelse, der vil følge en kasteparabel uafhængigt af hvor meget han spræller med arme og ben, og en rotationsbevægelse relativt til massemidtpunktets bevægelse.

Ud fra (2.7) ser man således, at det ikke er muligt at ændre massemidtpunktets bevægelse ved hjælp af indre kræfter.

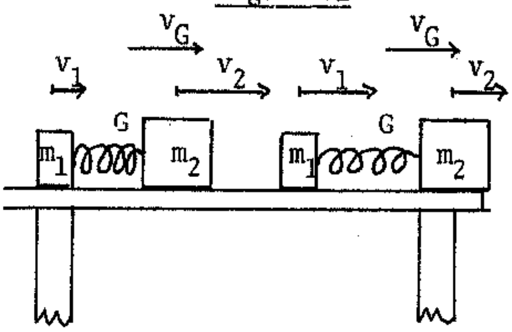
Det kan måske derfor undre, at det overhovedet er muligt at dirigere

Kap VII

et rumskib, når man ikke kan betjene sig af luftmodstand eller andre ydre gnidningskræfter. Kendsgerningerne er, at massemidtpunktet faktisk følger en bane, som er fastlagt af ydre gravitationsfelter. Når en vis masse slynges bagud af raketmotoren med stor hastighed, må rumskibet bevæge sig frem med en mindre hastighed, netop så stor at det samlede systems massemidtpunkt ikke flytter sig af den grund.

3. IMPULSSÆTNINGEN FOR ET SYSTEM AF PARTIKLER.

Figur 3.1



Vi skal nu se på et system, hvor partiklerne godt kan påvirke hinanden indbyrdes med kræfter, men hvor der gælder, at den resulterende ydre kraft er nul.
Af (2.7) ses, at $\vec{F}_{ydre} = \vec{F}_{res} = \vec{0}$ medfører at $d\vec{p}/dt = \vec{0}$ og heraf følger at systemets samlede impuls $\vec{p}$ er konstant.

Dette er indholdet af impulssætningen for et system af partikler. Når $\vec{F}_{ydre} = 0$ kaldes systemet for isoleret, og impulssætningen formuleres normalt på følgende måde:

For et isoleret system af partikler er systemets samlede impuls konstant. Hermed er også massemidtpunktets hastighed konstant.

$$\boxed{\vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{p}_{samlet} = \Sigma\, m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_G = \text{konstant vektor.}} \tag{3.2}$$

Figuren ovenfor skal forestille to masser, der indbyrdes påvirker hinanden med fjederkræfter, og som samtidigt glider gnidningsfrit afsted på et vandret bord. De to legemers indbyrdes bevægelse vil være accelereret, men da $\vec{F}_{ydre} = \vec{0}$ vil massemidtpunktet bevæge sig jævnt og retlinet hen langs bordet.

Vi har i bind 1 udledt impulssætningen ved en retlinet bevægelse, for et sammenstød mellem to legemer.
Uafhængigt af hvorledes de to legemer påvirker hinanden, vil summen

af de to legemers impuls før stødet være lig med summen af de to legemers impuls efter stødet.
Betegnes hastigheder før stødet med $\vec{u}_i$ og hastigheder efter stødet med $\vec{v}_i$, kan impulssætningen for et stød skrives:

(3.3) $\boxed{\Sigma\, m_i\vec{u}_i = \Sigma\, m_i\vec{v}_i}$ $(m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ for to partikler)

Den kinetiske energi er i almindelighed ikke bevaret for et isoleret system, der gælder derimod:

(3.4) $$\Sigma\, \tfrac{1}{2}m_iv_i^2 = \Sigma\, \tfrac{1}{2}m_iu_i^2 + \Delta E_{kin}$$

ΔE_{kin} tilvæksten i kinetisk energi, kaldes ofte for Q-værdien for stødet, og man skriver da også Q i stedet for ΔE_{kin}.
$Q = E_{kin}$ kan være positiv, negativ eller nul:

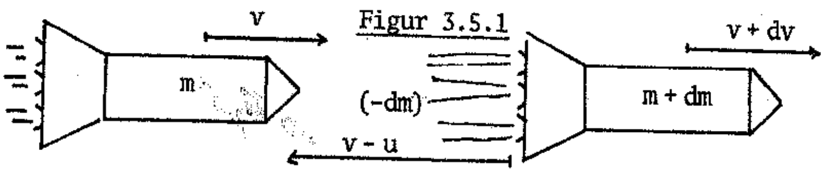
$\Delta E_{kin} < 0$: Dette svarer til et uelastisk stød, hvor kinetisk energi omdannes til indre energi (normalt ved gnidning).

$\Delta E_{kin} > 0$: Dette svarer til et uelastisk stød, hvor indre energi omdannes til kinetisk energi. (Dette vil f.eks. være tilfældet, når en granat eksploderer).

$\Delta E_{kin} = 0$: Den kinetiske energi er bevaret, og stødet kaldes da for elastisk. For et stød mellem to legemer kan hastighederne efter stødet beregnes af impuls- og energisætningen.

3.5 Eksempel. Raketfremdrift. En anvendelse af impulssætningen.
En rakets fremdrift er som bekendt baseret på, at materiale slynges ud af rakettens ene ende med stor hastighed. Som følge af impulsens bevarelse i et isoleret system, må raketten få en fremdrift modsat rettet det udslyngede materiale.
Vi vil antage, at raketten pr. tidsenhed udslynger massen μ med farten u i forhold til raketten. Herved ændres rakettens masse med tiden således at $m = m(t)$ og $\frac{dm}{dt} = -\mu$. (Minustegnet, fordi m(t) er aftagende, mens μ er positiv).

Kap VII



Til tidspunktet t har raketten massen m og hastigheden v. Impulsen til dette tidspunkt er derfor $p(t) = mv$.
I løbet af det lille tidsrum dt udslynger raketten massen $-dm$ med hastigheden u, samtidig med at den selv får en hastighedsforøgelse dv. I forhold til den iagttager, hvor raketten har hastigheden v, vil det udslyngede materiale have hastigheden $v - u$.
Impulsen til tidspunktet $t + dt$ er lig med summen af rakettens og den udslyngede masses impuls: $p(t + dt) = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v-u)$
Ifølge impulssætningen for et isoleret system er $p(t) = p(t + dt)$:

$$m v = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - u) \Leftrightarrow$$
$$m v = m v + m\,dv + v\,dm + dm\,dv - v\,dm + u\,dm \Leftrightarrow$$
$$m\,dv + dm\,dv + u\,dm = 0$$

Leddet $dm\,dv$ er lille af 2. orden i de små tilvækster dm og dv, og vi kan derfor tillade os at se bort fra det. (Ved division med dt og grænseovergang $dt \to 0$ vil det, i modsætning til de to andre led gå imod nul). Impulssætningen er dermed reduceret til den simple ligning:

$$(3.5.2) \qquad m\,dv + u\,dm = 0 \Leftrightarrow dv = -u\frac{dm}{m} \Rightarrow \int_{v_o}^{v} dv = -u\int_{m_o}^{m} \frac{1}{m}\,dm$$

Det sidste integral har stamfunktionen $\ln(m)$, og man får således:

$$(3.5.3) \qquad v - v_o = -u(\ln m - \ln m_o) \Leftrightarrow v = v_o + u\ln\left(\frac{m_o}{m}\right)$$

Sidste ligning i (3.5.3) angiver den meget simple sammenhæng, der er mellem den opnåede hastighed v, massen af raketten $m = m_o - \mu t$ og hastigheden u af det udslyngede materiale.
$m = m_o - \mu t$ gælder naturligvis kun sålænge, der er brændstof tilbage.

Talekseempel: En raket med nyttelasten 3,0 ton skal frigøres fra jordens tyngdefelt. Raketten udslynger brændstoffet med hastigheden u = 2,5 km/s. Vi vil beregne den mængde brændstof raketten skal medføre for at opnå undvigelseshastigheden, som er 11,2 km/s. (Se side 106). Vi indsætter altså $v_o = 0$, slutmassen $m_s = 3{,}0$ ton i (3.5.3) og udregner m_o.

$$11{,}2\ \text{km/s} = 2{,}5\ \text{km/s}\ \ln\left(\frac{m_o}{m_s}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{m_o}{m_s}\right) = 4{,}48 \Rightarrow$$

$$\frac{m_o}{m_s} = 88{,}2 \Rightarrow m_o = 265\ \text{ton} \Rightarrow m_{brændstof} = 262\ \text{ton}$$

Eksemplet viser noget om størrelsesordenen mellem nyttelast og brændstoflast ved en raketopsendelse fra jorden.

3.6 Opgaver.

1) For systemet bestående af jorden og månen gælder, at forholdet $M_{måne}/M_{jord} = 0{,}0123$, $M_{jord} = 5{,}98\ 10^{24}$ kg, og at afstanden mellem centrene er 60R, hvor jordradius $R = 6{,}370$ km.

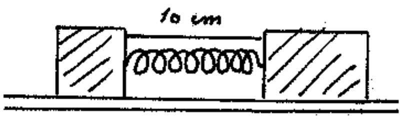
En raket tænkes at bevæge sig på centerlinien mellem de to legemer.

a) Bestem den position på centerlinien, hvor raketten er påvirket af lige store, men modsat rettede kræfter fra jorden og månen.

b) Opstil et udtryk for den potentielle energi af raketten i et punkt på centerlinien. (Der skal tages hensyn til både jord og måne).

c) Udregn på grundlag af a) og b) den fart en måneraket skal sendes afsted fra jorden, for at den når månen.

2)



To klodser med masser 2,0 kg og 3,0 kg er forbundet med en fjeder med fjederkonstant 120 N/m, og hvis ustrakte længde er 30 cm. Fjederen presses nu sammen, så den får længden 10 cm, og denne stilling fastholdes med en snor. Systemet tænkes først placeret på et glat bord, og til tidspunktet $t = 0$ brændes snoren over.

a) Angiv hver af klodsernes acceleration og systemets massemidtpunkts acceleration lige efter, at snoren er brændt over.

Forsøget gentages nu på et bord, hvor gnidningskoefficienten er 0,20.

b) Besvar spørgsmålene fra a) under denne antagelse.