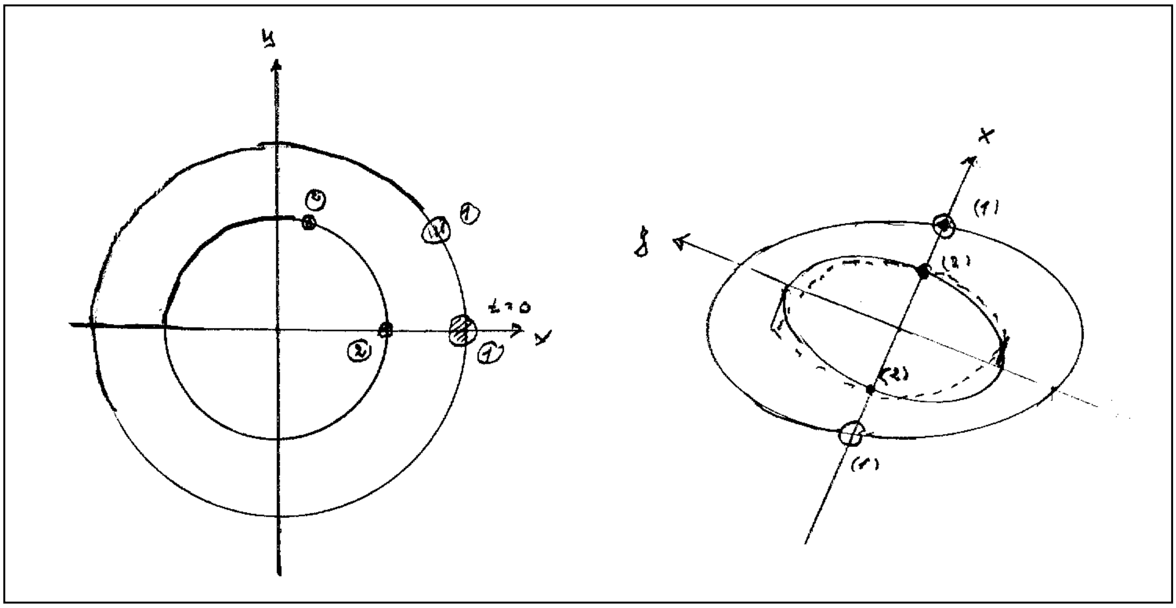
Merkur og Venus passager

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk

Ole Witt-Hansen 2019

Indhold

1. Hvad er en Merkur eller en Venus passage



En Merkur eller Venus passage, betyder at planeten sammen med jorden ligger på en ret linie gennem solen, og at man derfor fra jorden kan se planeten passere med solen som baggrund.

Hvis planeten lå i samme baneplan som jorden ville passagen sker med perioden $0{,}371 \cdot T_{\text{jord}}$ for Merkur og $1{,}597 \cdot T_{\text{jord}}$ for Venus, som det er vist på figuren til venstre.
Da Merkurs baneplan imidlertid hælder $7{,}0^0$ i forhold til jordens baneplan og Venus baneplan hælder $3{,}4^0$, i forhold til jordens baneplan, er perioden langt større. Egentlig skulle man kun kunne se en ægte passage, når planeten og jorden begge befinder sig i et af de to skæringspunkter på skæringslinien mellem jorden og planetens baneplan.

Nu er det sådan, at solens vinkeldiameter er $0{,}53^0$, så jorden og planeten behøver ikke at befinde sig nøjagtig på skæringslinien, blot de står på en linie tæt på skæringspunktet, hvor så passagen vil kunne ses i den øvre eller nedre del af solskiven. Dette kræver imidlertid en lidt mere omfattende beregning.

Den 11. november 2019 oplevede vi en Merkur passage i Danmark. Vi skal da forsøge geometrisk at beregne den næste Merkur passage, samt perioden for en passage for Venus.

2. Tiden mellem to passager, når planeterne har samme baneplan

Hvis jorden og den anden planet har den samme baneplan er det relativt let at beregne tiden mellem to passager. Vi antager, at begge planeter bevæger sig i jævne cirkelbevægelser med radier r_1 og r_2 , omløbstider T_1 og T_2 svarende til vinkelhastighederne $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ og $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$

(2.1) $$\vec{r}_1 = r_1(\cos\omega_1 t, \sin\omega_1 t) \quad \text{og} \quad \vec{r}_2 = r_2(\cos\omega_2 t, \sin\omega_2 t),$$

Vi antager, at vi har en passage for $t = 0$ på den positive side af x-aksen, og vi vil da finde tidspunktet for den næste passage, (som altså ikke er på x-aksen). Betingelsen er derfor, at de to planeter har samme cosinus til fasen til tidspunktet t.

(2.2) $$\omega_2 t = \omega_1 t + p2\pi \text{ , } p = 0,1,2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{T_2} t = \frac{2\pi}{T_1} t + p2\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = p\frac{T_2 T_1}{T_1 - T_2}, \quad p = 0, 1, 2$$

Indsætter vi $T_1 = T_{\text{jord}} = 1$, $T_2 = T_{\text{merkur}} = 0{,}241$ samt $T_2 = T_{venus} = 0{,}615$,
finder vi for tiden mellem to passager:

(2.3) $$t_{merkur} = \frac{1 \cdot 0{,}241}{1 - 0{,}241} = 0{,}318 \cdot T_{jord} \quad \text{og} \quad t_{venus} = \frac{1 \cdot 0{,}615}{1 - 0{,}615} = 1{,}597 \cdot T_{jord}$$

3. Tiden mellem to passager for Merkur, når planeterne ikke har samme baneplan

Vi skal nu se på det tilfælde, hvor passagen kun kan forekomme, når de to planeter befinder sig på den samme side af skæringslinien mellem de to planeters baneplaner.
Lad os derfor antage, at vi har en passage til $t = 0$, og vil derfor bestemme det t, hvor cosinus igen er 1 for begge planeter. $\cos(\omega t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega t = p2\pi$, så vi finder:

(3.1) $$\omega_1 t = p_1 2\pi \quad og \quad \omega_2 t = p_2 2\pi \quad \Rightarrow t = \frac{p_1 2\pi}{\omega_1} \quad og \quad t = \frac{p_2 2\pi}{\omega_2} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{p_1 2\pi}{\omega_1} = \frac{p_2 2\pi}{\omega_2} \qquad \Rightarrow \qquad p_1 T_1 = p_2 T_2$$

Vi kunne imidlertid have opstillet den sidste betingelse uden de foregående regninger.
Den udtrykker blot, at tiden for p_1 omgange af jorden, skal være lig med tiden for p_2 omgange af planeten.
Vi ser først på tilfældet med Merkur, og sætter $T_1 = T_{\text{jord}} = 1$ og $T_2 = T_{\text{merkur}} = 0{,}241$. Ligningen er så:

(3.2) $$p_1 = 0{,}241 p_2$$

Da p_1 og p_2 skal være hele tal, har denne ligning den indlysende løsning:

$p_1 = 241$ og $p_2 = 1000$.

Det lidt kedelige ved denne beregning er imidlertid, at 241 er et primtal, så man kan ikke forkorte.
I første omgang konkluderer vi da, at vi vil have en Merkur passage med 241 års mellemrum, hvilket imidlertid er klart i strid med almanakken, idet det kan oplyses, at i årene mellem 2000 og 2100 forekommer disse 14 Merkur passager:

- 07. maj 2003
- 08. nov 2006 - ikke synlig i Danmark
- 09. maj 2016
- 11. nov 2019
- 13. nov 2032
- 07. nov 2039
- 07. maj 2049

Vi ser, at der ifølge almanakken er perioder på 3, 10, 3, 13 og 10 år. Perioden $p_1 = 3$ passer slet ikke med ligningen overfor, idet det giver $p_2 = 12{,}5$, mens perioden $p_1 = 6$ giver $p_2 = 24.90$, perioden $p_1 = 10$, giver $p_2 = 41{,}49$, perioden $p_1 = 13$, giver $p_2 = 53{,}94$.

Det kan bemærkes, at i en anden reference, hvor omløbstiderne er angivet i døgn.
T_{jord} = 365.254 døgn og T_{Merkur} = 87.969 døgn. Problemet er blot det, at disse to omløbstider er indbyrdes primiske. I referencen angives perioderne til 6, 7, 13, 46, 217, hvor kun perioden 13 er næsten i overensstemmelse med almanakken og den geometriske beregning

Ud fra en Newtonsk geometrisk beregning, burde der jo kun være én periode.

De halvtallige p_2 værdier 12,5 og 41,49, kunne svare til at Merkur befinder sig på den modsatte ende af skæringslinien mellem baneplanerne. Jorden, solen og Merkur ligger på samme rette linie, men på hver sin side af solen, men det indebærer så, at passagen ikke er synlig fra jorden.
Med de usikkerheder, der er på beregningerne og perturbationer på planeternes baner, kan p_2 = 53,94, derimod godt være en ægte passage.

Konklusionen må være, at en ren geometrisk beregning, hvor jorden og planeterne antages at bevæge sig helt uafhængig af hinanden - endda med omløbstider på 6 cifre - ikke er tilstrækkeligt til at beregne det nøjagtige tidspunkt for en passage en passage, som varer få timer.
Tidspunkterne for en passage kan muligvis afgøres præcist teoretisk ved en computerberegning, men i øvrigt ved meget nøjagtige astronomiske observationer.

4. Tiden mellem to passager for Venus, når planeterne ikke har samme baneplan

Anvender vi resultatet på Venus, er resultaterne ikke bedre. Vi sætter T_1 = T_{jord} =1 og T_2 =T_{venus} = 0,615. Laver vi nøjagtig den samme beregning for Venus, finder vi ligningen: (Hvis planeterne skal mødes på samme "sted"), så skal p_1T_1 (antal omløb af jorden gange jordens omløbstid) være lig med p_2T_2 (antal omløb af Venus gange Venus omløbstid).

(4.1) $p_1T_1 = p_2T_2$, som giver: $p_1 = 0{,}615p_2$,

Ligningen har løsningen: $p_1 = 615 \quad og \quad p_2 = 1000$, som kan forkortes til $p_1 = 123 \quad og \quad p_2 = 200$
Som det ses fra almanakken i tabellen nedenfor, er der perioder på p_1 = 8, 5, 7, 8, 122, 8, 5 år.

8 juni	2004	05.13	08.20	11.26	6 h 03 min	Fuldt synlig fra Danmark
6 juni	2012	22.09	01.29	04.49	6 h 40 min	Seneste passage
11 december	2117	23.58	02.48	05.38	5 h 40 min	
8 december	2125	13.15	16.01	18.48	5 h 33 min	Delvis synlig fra Vesteuropa.
11 juni	2247	08.42	11.33	14.25	5 h 43 min	Fuldt synlig fra Europa
9 juni	2255	01.08	04.38	08.08	7 h 00 min	Delvis synlig fra Europa
13 december	2360	22.32	01.44	04.56	6 h 24 min	

Vi forsøger nu at udregne p_2 svarende til værdierne: p_1 = 5, 7, 8, 122 , som giver: p_2 = 8,13, 11,38, 13,00, 198,31.

Tilsyneladende passer vores simple geometriske beregning langt fra. Kun $p_1 = 8$ passer næsten helt præcist. De øvrige observerede værdier for Venus passage, kan ikke forklares ved en simpel geometrisk beregning.

5. Passage på hver side af skæringslinien

Nu kan "passagen" - altså at de to planeter befinder sig på en ret linie, som går gennem solen - også ske, hvor de to planeter ligger på modsatte sider af solen. Det er så ikke en ægte passage, idet Merkur ikke vil kunne ses passere på solskiven, selv om de to planeter ligger på skæringslinien mellem planerne, og vi vil derfor forsøge at bestemme, hvornår der en passage ved vinklen pi, når der har været en passage ved vinklen 0, til $t = 0$. Dette giver følgende ligninger:

$$\omega_1 t = p_1 2\pi \quad og \quad \omega_2 t = \pi + p_2 2\pi \quad \Rightarrow$$
$$t = \frac{2p_1\pi}{\omega_1} \quad og \quad t = \frac{(2p_2+1)\pi}{\omega_2} \quad \Rightarrow$$

(5.1) $$p_1 T_1 = (p_2 + \tfrac{1}{2})T_2$$

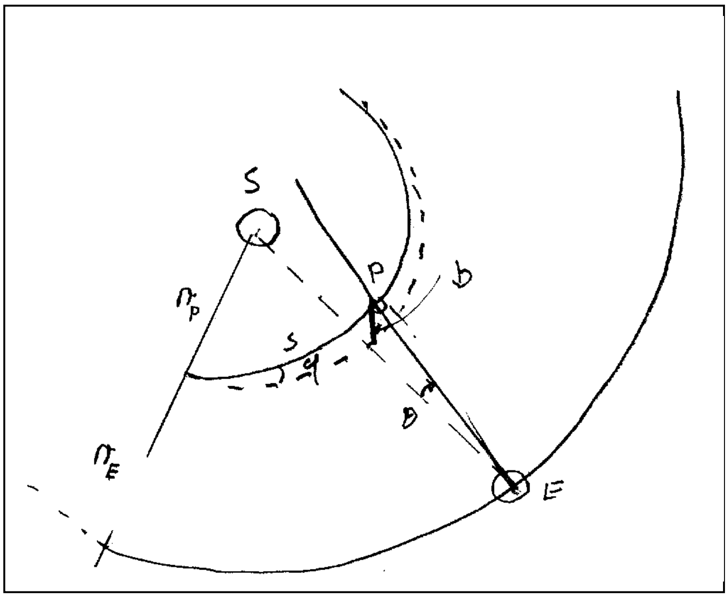
Sætter vi $T_1 = T_{\text{jord}} = 1$ og $T_2 = T_{\text{merkur}} = 0{,}241$, finder vi på samme måde som før.

$$p_1 T_1 = 0{,}241\ (p_2 + \tfrac{1}{2})T_2$$, som vi tidligere har fundet en løsning til:
$$p_1 = 241 \ og \ (p_2 + \tfrac{1}{2}) = 1000$$

Det ses, at ligningerne ikke kan have nogen heltallige løsninger p_1 og p_2 . Det fører i den geometriske model til den konklusion, at hvis de to planeter har en ægte passage på den positive x-akse, så kan de ikke have en passage, hvor de ligger på hver sin side af solen.
Af den simple analyse kan vi derfor indse, at hvis Merkur har en passage langs den positive x-akse, så kan den *ikke* have en passage langs den negative x-akse. Hvorvidt dette passer med observationerne, ved jeg ikke, men det er en direkte konsekvens af vores geometriske model.

Laver vi den samme beregning for Venus, får vi ligningen, får vi det samme resultat, blot med nogen andre værdier idet højresiden altid vil være heltallig, mens $p_2 + \tfrac{1}{2}$ er halvtallig.

6. Hvis vi tager hensyn til solens vinkeldiameter



I de foregående afsnit, har vi set, at det ikke er muligt, teoretisk geometrisk, at reproducere perioderne i de mulige passager af de to planeter Merkur og Venus. Forudsætningen var at de to planeter lå på en linie, som også gik gennem solens centrum. Nu har solen imidlertid en vinkeldiameter på $0{,}53^0$, så hvis jorden og en planet er på en linie som ikke peger direkte mod solens centrum, men dog rammer solen, så vil man se en passage i den øvre eller nedre del af solen. Vi vil nu se på, hvorvidt denne tillempning af passager kan ændre konklusionerne fra de to foregående afsnit.

På tegningen ovenfor er vist en skitse med solen *S*, jorden *E* og planeten *P*. Radius i planetens bane er r_P, radius i jordens bane er r_E. Vinklen mellem de to planer er φ. I Planetens position er den vinkelrette afstand til jordens baneplan lig med *b*. Endelig er θ den vinkel, som planeten ses under fra jorden og *s* er den bue, som planeten har bevæget sig fra skæringslinien til tidspunktet *t*. T_P er planetens omløbstid, og T_E (= 1) er jordens omløbstid.
Vi vil udregne, hvor lang tid planeten kan bevæge sig, så sigtelinien, der forbinder planeterne stadig rammer solskiven. Vi har:

(6.1) $$s = \frac{t}{T_P} 2\pi r_P \ , \quad b = s\varphi \quad \text{og} \quad \theta = \frac{b}{r_E - r_P} \quad \text{giver:} \quad \theta = \frac{t}{T_P} 2\pi r_P \frac{\varphi}{r_E - r_P},$$

og hvis vi isolerer *t*.

(6.2) $$t = \frac{\theta T_P}{2\pi r_P} \frac{r_E - r_P}{\varphi} \ .$$

Indsætter vi værdierne for Merkur:
$T_{merkur} =$ 0,241, r_{jord} =1, $r_{merkur} =$ 0,387, φ_{mekur} = 7,0^0 = 0.122, samt ½θ = 0,265^0 = 0,004 rad, får vi:

$$t_{merkur} = 0{,}00514\ T_E$$

Indsætter vi værdierne for Venus:

T_{venus} =0,615, r_{jord} =1, $r_{venus} =$ 0,723, φ_{venus} = 3,39^0 = 0.00463, samt ½θ = 0,265^0 = 0,004 rad, får vi:

$$t_{venus} = 0{,}0324\ T_E$$

Vi vil da undersøge om, vi kan finde heltallige løsninger for p_1 og p_2, som er i overensstemmelse med almanakken, hvis vi medtager den korrektion, at sigtelinien mellem planeten og jorden, blot skal ramme solskiven, og ikke nødvendigvis solens centrum.
Vi modificerer de to ligninger fra (3,1) til:

$$\omega_1 t = p_1 2\pi \quad og \quad \omega_2 t = (p_2 + \delta)2\pi \quad \Rightarrow \ t = \frac{p_1 2\pi}{\omega_1} \quad og$$

$$t = \frac{(p_2 + \delta)2\pi}{\omega_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1 2\pi}{\omega_1} = \frac{(p_2 + \delta)2\pi}{\omega_2} \quad \Rightarrow$$

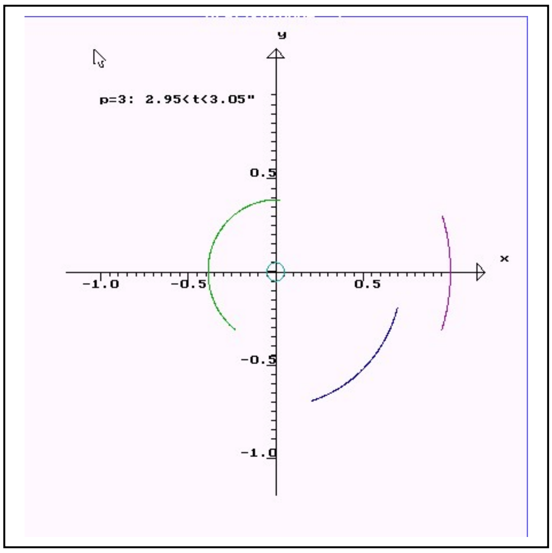
(6.3) $$p_1 T_1 = (p_2 + \delta) T_2$$

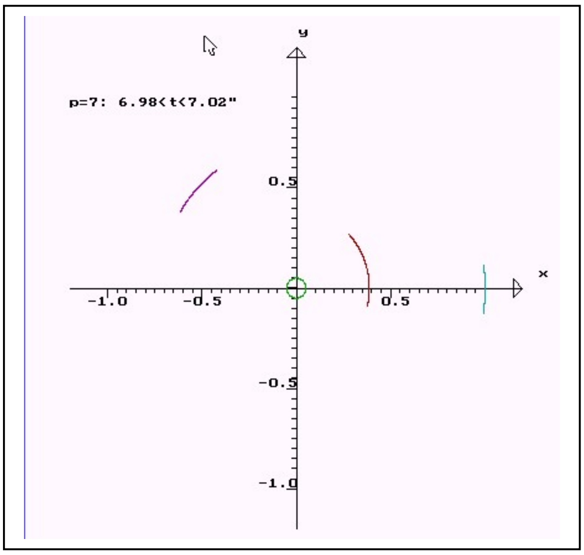
Først ser vi på Merkur, hvor: $T_1 = T_{\text{jord}} = 1$, $T_2 = T_{\text{Merkur}} = 0{,}241$ og $\delta_{Merkur} = 0{,}00514$, og $p_1 = (p_2 + \delta)0{,}241$ Perioderne er ifølge almanakken er 3, 10, 3, 13 og 10 år.
Perioden $p_1 = 3 \Rightarrow p_2$ =12,5. Perioden $p_1 = 10$, $\Rightarrow p_2 = 41{,}49$. Perioden $p_1 = 13$, $\Rightarrow p_2 = 53{,}94$.
Som det indlysende fremgår, så er det ikke engang perioden $p_1 = 13$, $p_2 = 53{,}94$, der kan forklares, når man tager hensyn til sol diameteren. Korrektionen er alt for lille.

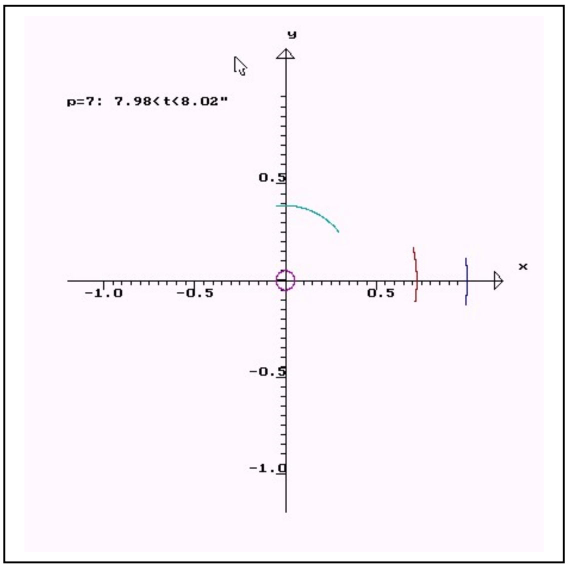
For Venus er situationen nogenlunde den samme: $T_1 = T_{\text{jord}} = 1$, $T_2 = T_{\text{Venus}} = 0{,}615$ og $\delta_{Venus} = 0.0324$, $p_1 = (p_2 + \delta)0{,}615$. Ifølge almanakken er perioderne: p_1 = 5, 7, 8, 122 , som giver: p_2 = 8, 13, 11, 38, 13,00, 198,31. Men ingen af disse tal kan korrigeres til et helt tal, ved at tilføje et $\delta_{Venus} = 0.0324$ til p_2.

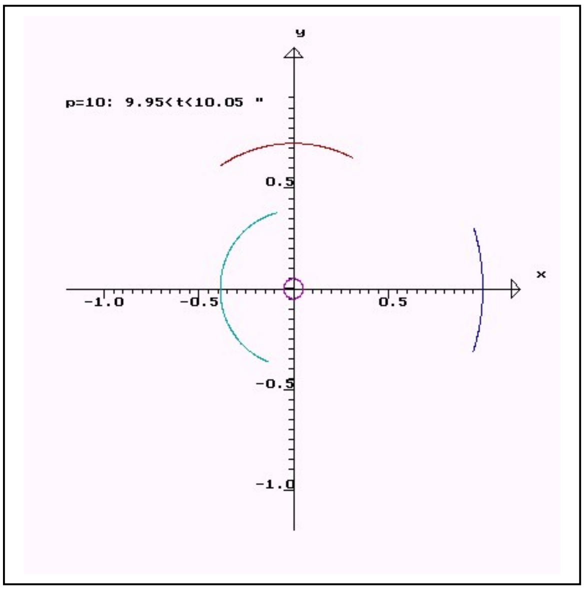
7. Grafisk fremstilling af påståede passager af Merkur og Venus

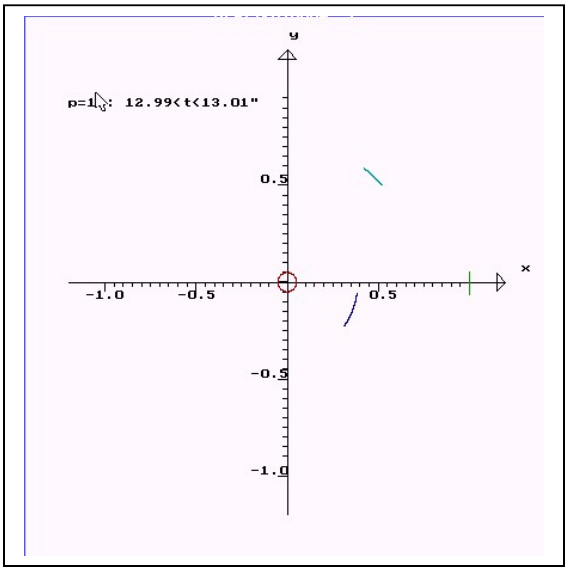
I den grafiske simulation af de to planeters bevægelse er faktisk kun p = 8, 13, 123, 241, som giver noget, der kunne ligne en passage.
Det er klart, at vi får en ægte passage for værdierne 123, 241, da det er de teoretiske værdier for den periode for en passage af henholdsvis Venus og Merkur. Ifølge den geometriske model, burde der jo kun være én (mindste) periode. For p = 3 og p = 10, ser det ud som om jorden, planeten og solen ligger på en ret linie, men hvor jorden og planeten befinder sig på hver sin side af solen. Dette mener jeg ikke at man kan betegne som en passage.
Hvad uoverensstemmelsen skyldes, at der er flere observerede perioder, må skyldes den gensidige tiltrækning mellem Jorden, Merkur og Venus. Noget som kun kan afgøres ved nøjagtige observationer eller omfattende computer beregninger.

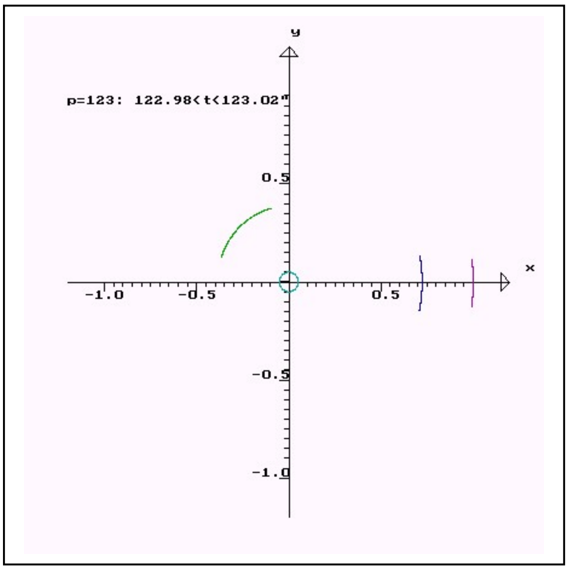


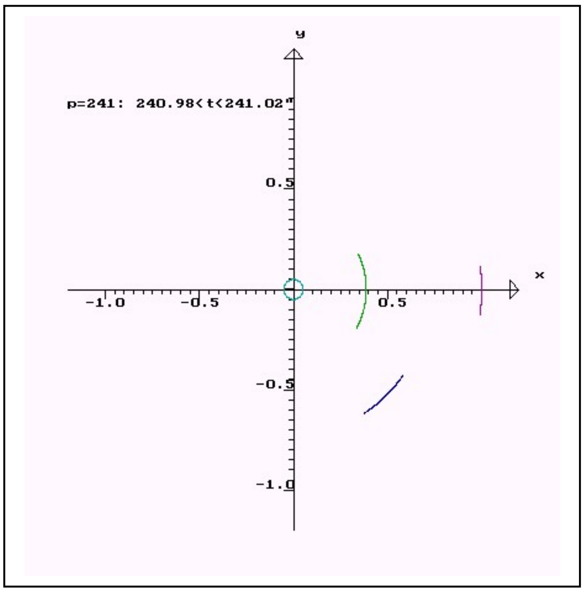












8. Simulation af de tre planeters baner ud fra bevægelsesligningerne

Ud fra Newtons gravitationslov kan man opstille 6 anden ordens differentialligninger, som beskriver de tre planeters bevægelse som følge af deres bevægelse om solen og deres gensidige gravitationelle tiltrækning, under den antagelse, at de alle som udgangspunkt bevæger sig i cirkelbaner med solen i centrum og at de befinder sig i samme baneplan.

Af hensyn til den numeriske beregning er det imidlertid praktisk at anvende planetariske enheder (PU) i stedet for (SI) enheder.

Længde: (Mm), *tid*: (h), og hastighed: (Mm/h). I disse enheder får vi for de fysiske konstanter:

$G = 6.67\ 10^{-11}$ SI = $8.644\ 10^{-22}$ PU,
$M_{jord} = 5.98\ 10^{24}$ kg, $M_{måne} = 7.35\ 10^{22}$ kg, $M_{venus} = 4.875\ 10^{24}$ kg, $M_{merkur} = 5.79\ 10^{4}$ kg.

Radier I de cirkulære baneplaner:
$r_{jord} = 1.496\,10^5\ Mm,\ r_{venus} = 1.082\,10^5\ Mm,\ \ r_{merkur} = 5.79\,10^4\ Mm$

Perioder i den orbitale bevægelse:
$T_{jord} = 1\ y = 8.76\,10^3 h,\ T_{venus} = 0.615 T_{jord} = 5.387\,10^3 h,\ T_{merkur} = 0.241 T_{jord} = 2.111\,10^3 h,$

Hastighed i den orbitale bevægelse:
$v_{jord} = 1.073\,10^2 Mm/h,\ v_{venus} = 1.262\,10^2 Mm/h,\ \ v_{merkur} = 1.723\,10^2 Mm/h,$

Gravitationskonstanten gange massen af planeten i planetariske enheder.
$GM_{sol} = 1.792\,10^9\ ,\ GM_{jord+måne} = 5.233\,10^3\ ,\ GM_{venus} = 4.213\,10^3\ ,\ GM_{merkur} = 284$

Vi kan så anvende disse konstanter til at fastlægge differentialligningerne for bevægelsen af de tre planeter, hvor Merkur = (1), Venus = (2), Jord = (3). Alle planeters baner antages at have solen fikseret i deres centrum.

Som et ses er solens tiltrækning mere end 500.000 gange større end planeternes gensidige tiltrækning, så selv om afstanden mellem planeterne i perioder, er langt mindre end deres afstand til solen, kan vi kun forvente mindre perturbationer fra planeternes indbyrdes bevægelse.
Det er imidlertid tilfredsstillende at konstatere, at planeternes bevægelse er i overensstemmelse med Newtons gravitationslov.
Nedenfor er de 6 differentialligninger opstillet.

$$\ddot{x}_1 = -\frac{1.792\,10^9 x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}^{\,3}} + \frac{5233(x_3 - x_1)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}^{\,3}} + \frac{4213(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^{\,3}}$$

$$\ddot{y}_1 = -\frac{1.792\,10^9 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}^{\,3}} + \frac{5233(y_3 - y_1)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}^{\,3}} + \frac{4213(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^{\,3}}$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{1.792\,10^9 x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}^{\,3}} + \frac{5233(x_3 - x_2)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}^{\,3}} + \frac{284(x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^{\,3}}$$

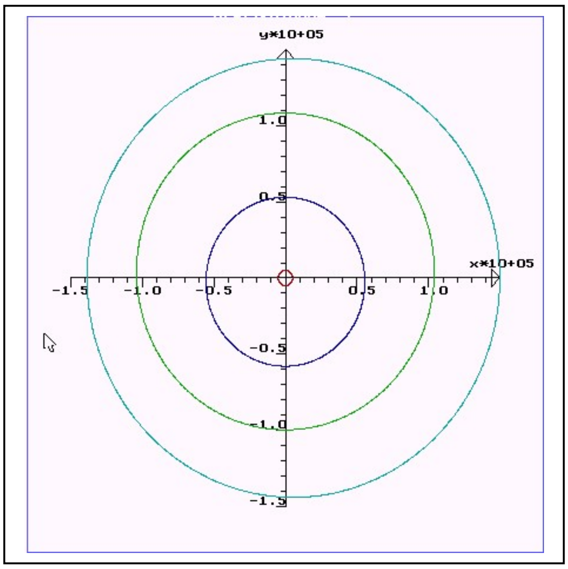
$$\ddot{y}_2 = -\frac{1.792\,10^9 y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}^{\,3}} + \frac{5233(y_3 - y_2)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}^{\,3}} + \frac{284(y_1 - y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^{\,3}}$$

$$\ddot{x}_3 = -\frac{1.792\,10^9 x_3}{\sqrt{x_3^{\,2} + y_3^{\,2}}^{\,3}} + \frac{5233(x_2 - x_3)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}^{\,3}} + \frac{284(x_1 - x_3)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}^{\,3}}$$

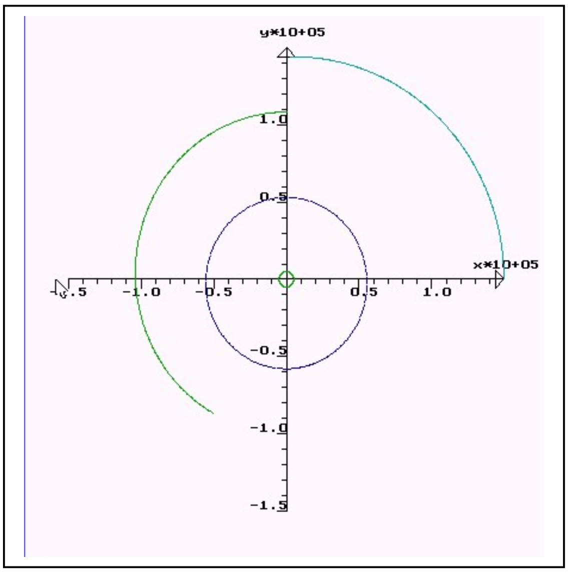
$$\ddot{y}_3 = -\frac{1.792\,10^9 y_3}{\sqrt{x_3^{\,2} + y_3^{\,2}}^{\,3}} + \frac{5233(y_2 - y_3)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}^{\,3}} + \frac{284(y_1 - y_3)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}^{\,3}}$$

Som det fremgår af de grafiske løsninger nedenfor, er der som forventet ingen synlige afvigelser fra planeternes cirkelbevægelse omkring solen.

Periode for jordens omløb:



Periode for Merkurs omløb:



Periode for Venus omløb: