Længste kast fra en given højde
Ekstremum med Lagrange multiplikatorer

Det er velkendt fra teorien for det skrå kast, at man får det længste kast ved en kastevinkel på 45^0. Beregningen forudsætter dog, at begyndelsespunktet og nedsalgspunktet er i samme vandrette plan.

Hvis bevægelsen begynder i (0,0) med farten v_0 og kastevinkel α, er bevægelsesligningerne:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha - gt \end{pmatrix} \quad og \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \cdot t \\ v_0 \sin\alpha \cdot t - ½gt^2 \end{pmatrix}$$

Stighøjden finder man ved at sætte $v_y = 0$ og indsætte resultatet for t i udtrykket for $y = y_{max}$, som

giver: $$y_{\max} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}.$$

Kastevidden findes ved at løse ligningen $y=0$ mht. t og indsætte det i udtrykket for x, som efter en lille omskrivning giver: $x_{\max} = \dfrac{v_0^{\,2} \sin 2\alpha}{g}$

Det længste kast fås indlysende, når $\sin 2\alpha = 1$ altså, når $\alpha = 45^0$.

Vi antager derefter, at kastet indledes fra højden h. Det kunne være et spydkast eller et hammerkast, eller kast fra et tårn.
Umiddelbart kunne man måske tro, at det ikke kan gøre den store forskel i beregningerne, men det er faktisk tilfældet.

Bevægelsesligningerne er nu:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha - gt \end{pmatrix} \quad og \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \cdot t \\ h + v_0 \sin\alpha \cdot t - ½gt^2 \end{pmatrix}$$

Opgaven er nu at bestemme maksimum for $x(\alpha) = v_0 \cos\alpha \cdot t$, hvor t er en af løsningerne til ligningen:

$$y = 0 \;\Leftrightarrow\; h + v_0 \sin\alpha \cdot t - ½gt^2 = 0.$$

Selv om man får opskrevet en løsning af 2.gradsligningen mht. t , og får udtrykket indsat i $x(\alpha) = v_0 \cos\alpha\, t$, og selv om man får differentieret udtrykket mht. α, så viser det sig umuligt at løse ligningen: $x'(\alpha) = 0$.

Løsningen på dette og lignende problemer hedder: Ekstremum med bibetingelse, løst ved hjælp af Lagrange multiplikatorer. Vi illustrerer teknikken med en funktion af to variable, men det er indlysende at generalisere til n variable.

Lad der være givet en funktion $y = f(x,y)$, som vi ønsker at bestemme ekstremum for.
Et ekstremumspunkt er bestemt ved at differentialet $dy = 0$.

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

Længste kast fra en given højde
Ekstremum med Lagrange multiplikatorer

Hvis dx og dy er uafhængige, så giver betingelsen det velkendte resultat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad og \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Men hvis nu de to variable er bundet sammen af en bibetingelse: $g(x,y) = c$, og hvor det ikke er muligt at isolere x eller y og indsætte det i $f(x,y)$, men man kan opskrive en tilsvarende ligning for $g(x,y)$ sammen med ligningen ovenfor.

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

Hvis disse ligninger, skal være opfyldt samtidigt for alle variationer af dx og dy, så følger det, at:

$$(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \text{ og } (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y})$$

må være proportionale.

Betragter man nemlig de to ligninger som et ligningssystem med de ubekendte dx og dy, så må ligningssystemets determinant være 0 (da højresiden er 0).
Determinanten er imidlertid:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = -\lambda \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f + \lambda g) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda g) = 0$$

Man har tradition for at kalde proportionalitetskonstant for - λ.

De sidste to ligninger svarer imidlertid til at bestemme ekstremum for funktionen $f(x,y) + \lambda g(x,y)$.

Konstanten λ kan bestemmes ud fra randbetingelserne for opgaven.

Vi vender tilbage til det skrå kast og definerer vores funktioner:

$$x = f(t,\alpha) = v_0 \cos\alpha \cdot t \quad og \quad y = g(t,\alpha) = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - ½gt^2$$

Vi søger maximum for $x(t,\alpha)$ under bibetingelsen $y = 0$ og danner funktionen: $F = f + \lambda g$

$$F(t,\alpha) = v_0 \cos\alpha \cdot t + \lambda(h + v_0 \sin\alpha \cdot t - ½gt^2).$$

Vi udregner da de partielle afledede og sætter dem lig med nul.

Længste kast fra en given højde
Ekstremum med Lagrange multiplikatorer

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 \cos\alpha + \lambda v_0 \sin\alpha - \lambda g t = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -v_0 \sin\alpha \cdot t + \lambda v_0 \cos\alpha \cdot t = 0$$

Af den sidste ligning følger, at λ = tanα, som indsættes i den første ligning for at bestemme t.

$$v_0 \cos\alpha - gt \tan\alpha + \tan\alpha v_0 \sin\alpha = 0 .$$

Multiplikation med *cosα,* og isolation af *t*, giver:

$$t = \frac{v_0}{g \sin\alpha} ,$$

som indsættes i bibetingelsen for at bestemme α.

$$-½ g\left(\frac{v_0}{g\sin\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{v_0}{g \sin\alpha}\right) + h = 0$$

som kan løses med hensyn til sinα til at give:

$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}\frac{v_0^{\,2}}{v_0^{\,2} + gh} = \tfrac{1}{2}\frac{1}{1 + \frac{gh}{v_0^{\,2}}}$$

Eksempler

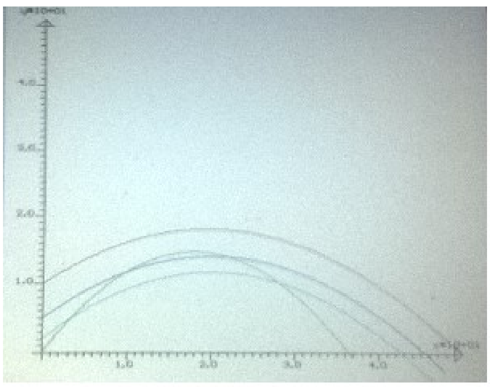
Hvis *h=0*, så er $\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}$, så vinklen er 45^0, som den skulle være.

Hvis h = 2, 0 m og v_0 = 20 m/s = 72 km/h, finder man for kastevinklen for det længste kast til at være $\alpha = 43{,}66^0$. Noget man må anse det umuligt at tage højde for en spydkaster.

Hvis derimod h = 20, 0 m og v_0 = 20 m/s = 72 km/h, finder man for kastevinklen for det længste kast $\alpha = 35{,}39^0$.

Nedenfor er vist graferne for fire kast fra højderne h =0 *m*, 2,0 *m*, 5,0 *m* og 10,0 *m*,

Fra graferne ser man at jo højere objektet kastes fra med den samme udgangsfart og den optimale vinkel, jo store er kastevidden. Dette er ikke overraskende. Mere overraskende er det måske as kaste vidden forøges med omkring 8 meter i forhold til, hvis kastet skete fra jorden.



Ole Witt-Hansen
2/10-2013