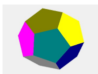
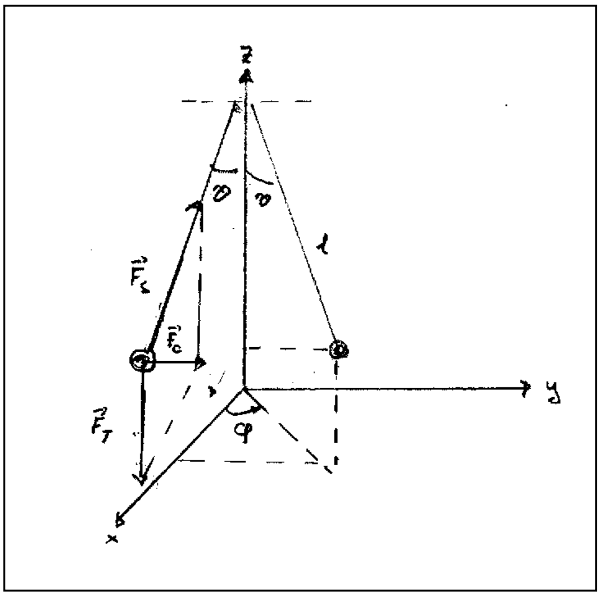
Det koniske og det kaotiske pendul



Ole Witt-Hansen 2019 (1997)

1. Dynamisk analyse af det koniske pendul



Figuren til venstre viser et konisk pendul, som er fastgjort på *z*-aksen, og hvor pendullængden er *l*. Når vi anvender polære koordinater, gælder der for loddets position (*x, y, z)*.

$$x = l\sin\theta\cos\varphi, \quad y = l\sin\theta\sin\varphi, \quad z = l(1-\cos\theta)$$

Den kinetiske energi er:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Og den potentielle energi:

$$E_{pot} = mgz$$

Det er velkendt, (men lidt omstændeligt at vise), at Hastighederne: $v_\theta = r\dot{\theta}$ og $v_\varphi = r\sin\theta\,\dot{\varphi}$, og at der desuden gælder: $v^2 = v_\theta{}^2 + v_\varphi{}^2$.
For at bestemme bevægelsesligningerne, skal vi anvende Lagrange formalismen:
Traditionelt anvender man betegnelsen *T* for den kinetiske energi og *U* for den potentielle energi. Lagrange funktionen er:

$$L = T - U$$

Med generaliserede koordinater: $q_i, \dot{q}_i$, og hvor et punkt over en variabel som sædvanlig betyder differentiation med hensyn til tiden er Lagrange bevægelsesligninger:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$T = \tfrac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) = \tfrac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \quad og \quad U = mgl(1-\cos\theta)$$

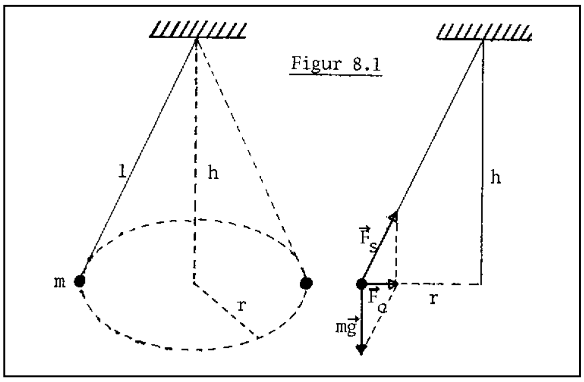
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ml^2(\ddot{\theta} - \cos\theta\sin\theta\dot{\varphi}^2) + mgl\sin\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ml^2(2\cos\theta\sin\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}) + \sin^2\theta\ddot{\varphi}) = 0$$

Bevægelsesligningerne bliver således:

$$\ddot{\theta} = \cos\theta\sin\theta\dot{\varphi}^2 - \frac{g\sin\theta}{l} \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{2\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}}{\sin\theta}$$

1.1 Konisk pendul



Et lod, der er ophængt i tyngdefeltet kan bringes til at udføre en jævn cirkelbevægelse. Det kaldes da for et konisk pendul. Loddet er påvirket af tyngden $\vec{F} = m\vec{g}$ og snorkraften $\vec{F}_s$. Summen af de to kræfter leverer den til cirkelbevægelsen nødvendige centripetalkraft $F_c = m\omega^2 r$.
Længden af snoren er *l*. Højden fra ophængningspunktet til planen for cirkelbevægelsen er *h*, og radius i cirkelbevægelsen er *r*. Fra de to ensvinklede trekanter på tegningen, ses at:

$$\frac{F_c}{mg} = \frac{r}{h} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{r}{h} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{h} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} \quad \wedge \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

Disse resultater for det koniske pendul, kan anvendes til at beregne begyndelsesvinkelhastighederne af $\dot{\theta}$ *og* $\dot{\varphi}$, når loddet udfører en jævn cirkelbevægelse.

Nedenfor er vist nogle grafiske afbildninger, baseret på numeriske løsninger til bevægelsesligningerne. Programmet er et Turbo 7.0 Dos program fra 1996.
Figuren til venstre, er et egentligt konisk pendul, som udfører en plan bevægelse.

Data er: $l = 2{,}0\ m$, $h = l\cos\theta = ½l$, $\theta = 60^0$. $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} = 3{,}367\ s^{-1}$

Figuren til højre, svarer til begyndelseshastigheder for $\dot{\theta}$ *og* $\dot{\varphi}$, som afviger fra den jævne cirkelbevægelse. Bevægelsen er hverken periodisk eller kaotisk.