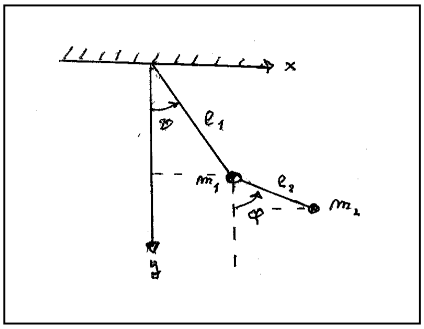
Generaliserede koordinater. Opstilling af Euler-Lagrange ligningerne



Hvis et system er bestemt ved generaliserede koordinater q_i, er Euler-Lagranges ligninger for ekstremum af en funktional F.

(1.1) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0$$

$\dot{q}_i$ betyder som sædvanlig differentiation af q_i med hensyn til tiden. Lagrange funktionen fra den analytiske mekanik er:

(1.2) $$L = T - U$$

Hvor T er den kinetiske energi, og U er den potentielle energi. Udtrykt ved L bliver Euler-Lagrange ligningerne:

(1.3) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Som giver bevægelsesligningerne for et mekanisk system i de generaliserede koordinater.

På figuren ovenfor er vist et system af koblede penduler. De generaliserede koordinater er θ, som er det øverste penduls angulære udsving fra lodret, og φ, som er det nederste penduls angulære udsving fra lodret. Masserne af de to (matematiske) penduler er m_1 og m_2 , og pendullængderne er l_1 og l_2. Vi bestemmer først den potentielle energi af de to lodder.

(1.4) $$\begin{aligned} E_{pot}(1) &= m_1 g h_1 = m_1 g l_1 (1-\cos\theta) \\ E_{pot}(2) &= m_2 g h_2 = m_2 g l_1 (1-\cos\theta) + m_2 g l_2 (1-\cos\varphi) \end{aligned}$$

Den kinetiske energi er lidt vanskeligere for lod (2), idet vi først bestemme positionen af de to lodder som funktion af θ og φ.

(1.5) $$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (l_1 \sin\theta, l_1 \cos\theta) \\ (x_2, y_2) &= (l_1 \sin\theta, l_1 \cos\theta) + (l_2 \sin\varphi, l_2 \cos\varphi) \end{aligned}$$

Heraf fås:

(1.6) $$\begin{aligned} (\dot{x}_1, \dot{y}_1) &= (l_1 \cos\theta\,\dot{\theta}, -l_1 \sin\theta\,\dot{\theta}) \\ (\dot{x}_2, \dot{y}_2) &= (l_1 \cos\theta\,\dot{\theta}, -l_1 \sin\theta\,\dot{\theta}) + (l_2 \cos\varphi\,\dot{\varphi}, -l_2 \sin\varphi\,\dot{\varphi}) \end{aligned}$$

Og følgelig:

(1.7) $$E_{kin}(1) = \tfrac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1{}^2 + \dot{y}_1{}^2) = \tfrac{1}{2} m_1 l_1{}^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2\theta + \sin\theta^2) = \tfrac{1}{2} m_1 l_1{}^2 \dot{\theta}^2$$

For at opnå resultatet for (1), havde vi nu ikke behøvet, at opskrive det i koordinater, idet den generaliserede koordinat til (1) er $r_\theta = l_1\theta$, så $\dot{r}_\theta = l_1\dot{\theta}$, men med (2) er det mindre simpelt.

Vi bestemmer den kinetiske energi af (2) ud fra de generaliserede hastigheder:

(1.8) $$E_{kin}(2) = \tfrac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2) = \tfrac{1}{2} m_2 ((l_1 \cos\theta\,\dot{\theta} + l_2 \cos\varphi\,\dot{\varphi})^2 + (-l_1 \sin\theta\,\dot{\theta} - l_2 \sin\varphi\,\dot{\varphi})^2)$$

Summen af kvadraterne på det første led i de to parenteser vil som før give: $\tfrac{1}{2} m_2 l_1{}^2 \dot{\theta}^2$ og summen af kvadraterne på det andet led i de to parenteser vil på samme måde give: $\tfrac{1}{2} m_2 l_2{}^2 \dot{\varphi}^2$,
(fordi $\cos^2 + \sin^2 = 1$).
Men vi mangler de to dobbelte produkter (gange ½m_2): $m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta \cos\varphi$ *og* $m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \sin\theta \sin\varphi$

$$E_{kin}(2) = \tfrac{1}{2} m_1 l_1{}^2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l_2{}^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta \cos\varphi + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \sin\theta \sin\varphi$$

$$E_{kin}(2) = \tfrac{1}{2} m_1 l_1{}^2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l_2{}^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi} (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi)$$

(1.9) $$E_{kin}(2) = \tfrac{1}{2} m_1 l_1{}^2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l_2{}^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi)$$

Det sidste led vil nok gøre det (helt og aldeles) umuligt at løse bevægelsesligningerne analytisk.

Først opstiller vi Lagrange funktionen for systemet af de to penduler.

(1.10) $$\begin{aligned} L = T - U = {} & \tfrac{1}{2} m_1 l_1{}^2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l_1{}^2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l_2{}^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) - \\ & m_1 g l_1 (1 - \cos\theta) - m_2 g l_1 (1 - \cos\theta) - m_2 g l_2 (1 - \cos\varphi) \end{aligned}$$

Vi udregner derefter:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_1 g l_1 \sin\theta - m_2 g l_1 \sin\theta - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi) = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 g l_2 \sin\varphi - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_1 l_1{}^2 \dot{\theta} + m_2 l_1{}^2 \dot{\theta} + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l_2{}^2 \dot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta} \cos(\theta - \varphi)$$

Vi udregner dernæst bevægelsesligningerne først for Theta

(1.11) $$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = {} & \frac{d}{dt}(m_1 l_1{}^2 \dot{\theta} + m_2 l_1{}^2 \dot{\theta} + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi)) = \\ & m_1 l_1{}^2 \ddot{\theta} + m_2 l_1{}^2 \ddot{\theta} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi)(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) \end{aligned}$$

(1.12)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$l_1^2(m_1+m_2)\ddot{\theta} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}\sin(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi}) + (m_1+m_2)gl_1\sin\theta + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta-\varphi) = 0$$

Vi udregner dernæst bevægelsesligningerne for φ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(m_2 l_2^2\dot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\cos(\theta-\varphi)) =$$
$$m_2 l_2^2\ddot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\sin(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$m_2 l_2^2\ddot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\sin(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi}) - (-m_2 g l_2\sin\varphi - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta-\varphi) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$m_2 l_2^2\ddot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\sin(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi}) + m_2 g l_2\sin\varphi + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta-\varphi) = 0$$

Som det altid er tilfældet med matematiske penduler med små udsving x, så tilnærmer man $\sin x = x$ og $\cos x = 1$. Derefter får man:

I: θ**:** $l_1^2(m_1+m_2)\ddot{\theta} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi} - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi}) + (m_1+m_2)gl_1\theta + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi) = 0$

II: φ**:** $m_2 l_2^2\ddot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta} - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi}) + m_2 g l_2\varphi + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi) = 0$

Isolering af $\ddot{\theta}$ *og* $\ddot{\varphi}$ **fra de to ligninger**
Dette er de to koblede differentialligninger, som bestemmer bevægelsen af de to penduler.
Da både $\ddot{\theta}$ *og* $\ddot{\varphi}$ optræder i begge ligninger er vi nødt til at løse de to ligninger med hensyn til $\ddot{\theta}$ *og* $\ddot{\varphi}$. Dette er ret algebraisk ret omstændeligt, men jeg medtager alle de led, som jeg selv har anvendt.

Vi eliminerer først $\ddot{\varphi}$ **ved at gange I med** l_2 **og gange II med** $-l_1$**.**

I: $l_1^2 l_2(m_1+m_2)\ddot{\theta} + m_2 l_1 l_2^2\ddot{\varphi} - m_2 l_1 l_2^2\dot{\varphi}(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi}) + (m_1+m_2)gl_1 l_2\theta + m_2 l_1 l_2^2\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi) = 0$

II: $-m_2 l_1 l_2^2\ddot{\varphi} - m_2 l_1^2 l_2\ddot{\theta} + m_2 l_1^2 l_2\dot{\theta}(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi}) - m_2 g l_1 l_2\varphi - m_2 l_1^2 l_2\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi) = 0$

Og derefter at addere ligningerne

I+II :
$$(l_1^2 l_2(m_1+m_2) - m_2 l_1^2 l_2)\ddot{\theta} + (m_2 l_1^2 l_2\dot{\theta} - m_2 l_1 l_2^2\dot{\varphi})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi}) -$$
$$m_2 g l_1 l_2\varphi + (m_1+m_2)gl_1 l_2\theta + (m_2 l_1 l_2(l_2-l_1)\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi) = 0$$

Dernæst eliminerer vi $\ddot{\theta}$, ved at gange I med $-m_2 l_1 l_2$ og gange II med $l_1^{\,2}(m_1+m_2)$

I:
$$-l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}-(m_2 l_1 l_2)^2\ddot{\varphi}+(m_2 l_1 l_2)^2\dot{\varphi}(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})+$$
$$m_2 l_1 l_2(m_1+m_2)g l_1\theta+(m_2 l_1 l_2)^2\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)=0$$

II:
$$l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2 l_2^{\,2}\ddot{\varphi}+l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}-l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2 l_1 l_2\dot{\theta}(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})+$$
$$l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2 g l_2\varphi+l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2 l_1 l_2\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)=0$$

I+II:
$$(l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2 l_2^{\,2}-(m_2 l_1 l_2)^2)\ddot{\varphi}+((m_2 l_1 l_2)^2\dot{\varphi}-l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2 l_1 l_2\dot{\theta})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-$$
$$m_2 l_1 l_2(m_1+m_2)g l_1\theta+l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2 g l_2\varphi+((m_2 l_1 l_2)^2+l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2 l_1 l_2)\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)$$

Vi indfører nu korte symboler for konstanterne, i de to ligninger, hvor vi har elimineret $\ddot{\theta}$ *og* $\ddot{\varphi}$. Ligningerne gentages nedenfor.

Bevægelsesligningen for θ:

$$(l_1^{\,2}l_2(m_1+m_2)-m_2 l_1^{\,2}l_2)\ddot{\theta}+(m_2 l_1^{\,2}l_2\dot{\theta}-m_2 l_1 l_2^{\,2}\dot{\varphi})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-m_2 g l_1 l_2\varphi+(m_1+m_2)g l_1 l_2\theta+$$
$$(m_2 l_1 l_2(l_2-l_1)\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)=0$$

Divideres igennem med $l_1\, l_2$

$$l_1 m_1\ddot{\theta}+(m_2 l_1\dot{\theta}-m_2 l_2\dot{\varphi})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})+m_2 g\varphi+(m_1+m_2)g\theta-(m_2(l_2-l_1)\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)=0$$

Vi Indfører korte betegnelser $a_1,\ldots\, a_6$ for ligningens konstanter.

$$a_1\ddot{\theta}+(a_2\dot{\theta}-a_3\dot{\varphi})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})+a_4\varphi+a_5\theta-a_6\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)=0$$

$$\ddot{\theta}=-(a_2/a_1\dot{\theta}-a_3/a_1\dot{\varphi})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-a_4/a_1\varphi-a_5/a_1\theta+a_6/a_1\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)=0$$

Vi indfører følgende data: $l_1=0{,}50\,m,\ l_2=0{,}20\,m,\ m_1=0{,}10\,kg,\ m_2=0{,}030\,kg$

$a_1=l_1 m_1=0{,}05,\quad a_2=m_2 l_1=0{,}015,\quad a_3=m_2 l_2=0{,}006,\quad a_4=m_2 g=0{,}295,$
$a_5=(m_1+m_2)g=1{,}28,\quad a_6=m_2(l_2-l_1)=-0.009$

$a_1/a_1=1,\quad a_2/a_1=0{,}300,\quad a_3/a_1=0{,}120,\quad a_4/a_1=5.9,\quad a_5/a_1=25.6,\quad a_6/a_1=-0.18$

Den endelige reducerede bevægelsesligning for θ med talværdier.

$$\ddot{\theta}=-(0{,}3\dot{\theta}-0{,}120\dot{\varphi})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-5{,}9\varphi-25{,}6\theta-0{,}18\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)=0$$

Bevægelsesligningen for φ :

$$(l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2l_2^{\,2}-(m_2l_1l_2)^2)\ddot{\varphi}+((m_2l_1l_2)^2\dot{\varphi}-l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2l_1l_2\dot{\theta})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-$$
$$m_2l_1l_2(m_1+m_2)gl_1\theta+l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2gl_2\varphi+((m_2l_1l_2)^2+l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2l_1l_2)\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)$$

Divideres igennem med l_1 l_2.

$$l_1l_2m_1\ddot{\varphi}+(m_2^{\,2}l_1l_2\dot{\varphi}-l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2\dot{\theta})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-$$
$$m_2(m_1+m_2)gl_1\theta+l_1(m_1+m_2)m_2g\varphi+(m_2^{\,2}l_1l_2+l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2)\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)=0$$

Vi Indfører korte betegnelser b_1,… b_6 for ligningens konstanter.

$$b_1\ddot{\varphi}+(b_2\dot{\varphi}-b_3\dot{\theta})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-b_4\theta+b_5\varphi+b_6\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)=0$$

$$\ddot{\varphi}=-(b_2/b_1\dot{\varphi}-b_3/b_1\dot{\theta})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-b_4/b_1\theta-b_5/b_1\varphi+b_6/b_1\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)$$

$$l_1=0{,}50\;m,\; l_2=0{,}20\;m,\; m_1=0{,}10\;kg,\; m_2=0{,}030\;kg$$

$$b_1=l_1l_2m_1=0{,}1\,,\quad b_2=m_2^{\,2}l_1l_2=0{,}00009\,,\quad b_3=l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2=0.000975\,,$$
$$b_4=m_2(m_1+m_2)g_1l=0{,}0192\,,\quad b_5=l_1(m_1+m_2)m_2g=0{,}0192\,,\quad b_6=m_2^{\,2}l_1l_2+l_1^{\,2}(m_1+m_2)m_2=0{,}00107$$

$$b_1/b_1=1\,,\quad b_2/b_1=0{,}009\,,\quad b_3/b_1=0{,}0975\,,\quad b_4=1{,}92_1\,,\quad b_5/b_1=1{,}92\,,\quad b_6/b_1=0{,}107$$

$$\ddot{\varphi}=-(0{,}009\dot{\varphi}-0{,}975\dot{\theta})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-1{,}92\theta-1{,}92\varphi+0{,}107\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)$$

Vi har derfor de to koblede differentialligninger:

Differentialligning for θ

$$\ddot{\theta}=-(a_2/a_1\dot{\theta}-a_3/a_1\dot{\varphi})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-a_4/a_1\varphi-a_5/a_1\theta+a_6/a_1\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)=0$$
$$a_1/a_1=1,\quad a_2/a_1=0{,}300\,,\quad a_3/a_1=0{,}120\,,\quad a_4/a_1=5.9\,,\quad a_5/a_1=25.6,\quad a_6/a_1=-0.18$$

$$\boxed{\ddot{\theta}=-(0{,}3\dot{\theta}-0{,}12\dot{\varphi})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-5.9\varphi-25.6\theta-0{,}18\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)=0}$$

Differentialligning for φ

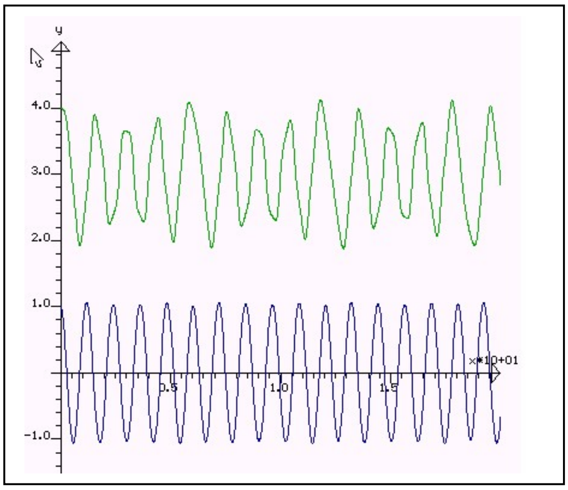
$$\ddot{\varphi}=-(b_2/b_1\dot{\varphi}-b_3/b_1\dot{\theta})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-b_4/b_1\theta-b_5/b_1\varphi+b_6/b_1\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)$$
$$b_1/b_1=1\,,\quad b_2/b_1=0{,}009\,,\quad b_3/b_1=0{,}0975\,,\quad b_4=1{,}92_1\,,\quad b_5/b_1=1{,}92\,,\quad b_6/b_1=0{,}107$$

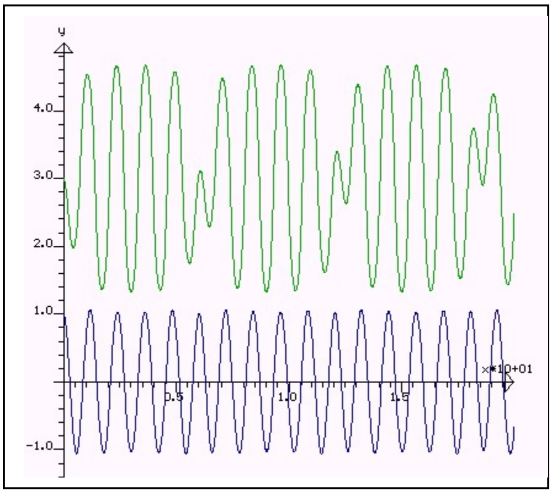
$$\boxed{\ddot{\varphi}=-(0{,}009\dot{\varphi}-0{,}975\dot{\theta})(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-1{,}92\theta-1{,}92\varphi+0{,}107\dot{\theta}\dot{\varphi}(\theta-\varphi)}$$

På forhånd, anser jeg det for udelukket, at man kan bestemme en analytisk løsning, så jeg har valgt at løse ligningerne numerisk. Det er gjort med et omfattende matematik program, som jeg lavede i Turbo Pascal (Turbo 7.0) i 1995. Det kan ikke længere køre efter afløseren for Windows XP, og der kan ikke laves screendumps efter Windows 98.

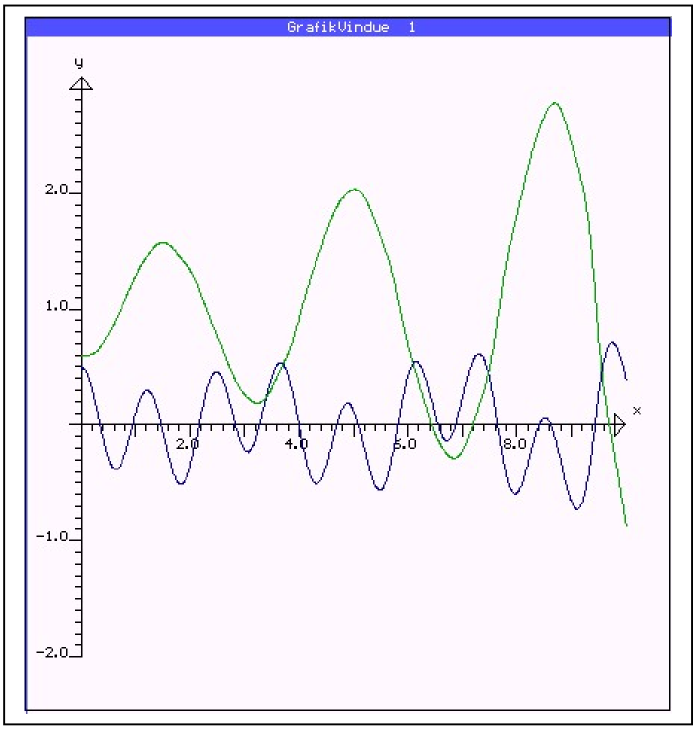
De to lodder har samme udsving *pi*/6 for $t = 0$, men jeg har forskudt grafen for det lette lod stykket 3 op ad 2. aksen. Graferne er lavet ud fra de værdier, som er angivet på side 5.

Grafen nedenfor til venstre viser nederst udsvinget af det store lod, og øverst udsvinget for det lille lod. Grafen til højre viser nederst udsvinget af det store lod og øverst forskellen mellem udsvinget for det store lod og det lille lod. Som det fremgår, er forskellen i udsving større end de enkelte lodders udsving og næsten periodisk, for det lille pendul med to perioder.





Hvis man vælger, at de to penduler har et moderat stort begyndelsesudsving, men til forskellig side udvikler det sig kaotisk, som vist på figuren nedenfor. De to grafer er de to pendulers udsving.



Eksemplet med de koblede penduler i tyngdefeltet, skal ikke betragtes som løsning af en opgave, som har en praktisk betydning, men mere en mere teoretisk demonstration af anvendelsen, af den analytiske mekanik og Lagrange formalismen.

Ole Witt-Hansen