

### 1. Koblede vandrette svingninger

Nedenfor er vist et eksempel på vandrette koblede svingninger. Hver af masserne  $m_1$  og  $m_2$  er fastgjort til en væg med en fjeder med fjederkonstanter  $k_1$  og  $k_3$ . Uden den midterste fjeder med fjederkonstant  $k_2$ , ville masserne udføre harmoniske svingninger med svingningstiderne:

$$(1.1) \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \quad \text{og} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_3}}$$

Dette udtryk for svingningstiden er en konsekvens af Hooke's law:  $F_{ff} = -kx$ , hvor  $k$  [N/m] betegner fjederkonstanten. Indsættes dette i Newtons 2. lov, får man:

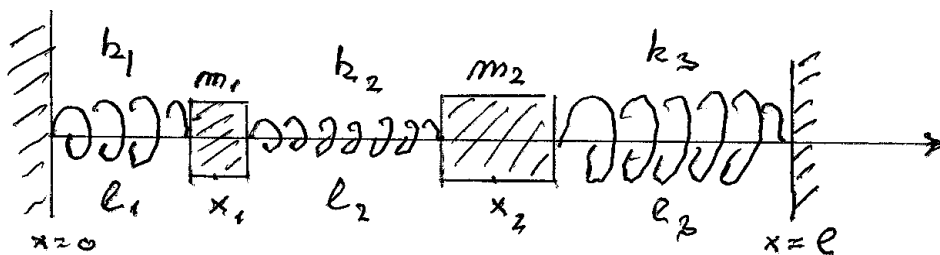
$$(1.2) \quad F_{res} = F_{ff} \quad \Leftrightarrow \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Ligningen har løsningen:  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , hvis og kun hvis  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , som det let ses ved at indsætte løsningen i (4.2)

Idet  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , hvor  $T$  er svingningstiden, finder man:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  som vist ovenfor.

Den potentielle energi af en fjeder, der er forlænget eller sammenpresset et stykke  $x$ , fra den ustrakte længde, kan bestemmes ud fra udtrykket for fjederkraften.

$$(1.3) \quad E_{pot} = \int_0^x F_{spring} dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$



Dette vil imidlertid ikke være tilfældet længere, når de to masser også er forbundet med fjederen med fjederkonstant  $k_2$ .

Systemet kan analyseres på flere måder, men det letteste er at anvende Lagranges ligninger med generaliserede koordinater. Lagrange funktionen  $L$  er defineret som:

$$(1.4) \quad L = T - U, \quad \text{hvor}$$

$$T = E_{kin} \text{ (kinetiske energi)} \quad \text{og} \quad U = E_{pot} \text{ (Potentielle energi)}.$$

Et punkt over en variabel betyder som sædvanlig differentiation med hensyn til tiden:

For eksempel:  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$  ..

Hvis systemet er beskrevet ved de generaliserede koordinater  $q_i$ , er bevægelsesligningerne i Lagrange formalismen:

$$(1.5) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

For systemet ovenfor, har vi de to (generaliserede) koordinater  $x_1$  og  $x_2$ , som er positionerne af de to masser. Vi skal da blot udtrykke den kinetiske og potentielle energi i disse koordinater og deres afledede, samt de ydre parameter, som er de tre fjederkonstanter, og de tre fjedres ustrakte længder:  $l_1, l_2, l_3$ . Vi sætter  $l = l_1 + l_2 + l_3$ .

$$(1.6) \quad E_{kin} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

Den potentielle energi af en fjeder er givet ved  $E_{pot} = \frac{1}{2}k\Delta x^2$ , hvor  $\Delta x$  er forskydningen (sammentrykning eller forlængelsen) fra den *ustrakte* længde.

For de tre potentielle energier af fjedrene får vi så:

$$(1.7) \quad E_{pot}(1) = \frac{1}{2}k_1(l_1 - x_1)^2, \quad E_{pot}(2) = \frac{1}{2}k_2(l_2 - (x_2 - x_1))^2, \quad E_{pot}(3) = \frac{1}{2}k_3(l_3 - (l - x_2))^2$$

$$(1.8) \quad L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1(l_1 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_2(l_2 - (x_2 - x_1))^2 - \frac{1}{2}k_3(l_3 - (l - x_2))^2$$

$$(1.9) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 - k_1(l_1 - x_1) + k_2(l_2 - (x_2 - x_1)) = 0$$

$$(1.9) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 - k_2(l_2 - (x_2 - x_1)) + k_3(l_3 - (l - x_2)) = 0$$

Systemet kan imidlertid også analyseres direkte ved at opskrive de kræfter, der virker på systemet.

$$F_1 = m_1\ddot{x}_1 = k_1(l_1 - x_1) - k_2(l_2 - (x_2 - x_1))$$

$$F_2 = m_2\ddot{x}_2 = k_2(l_2 - (x_2 - x_1)) - k_3(l_3 - (l - x_2))$$

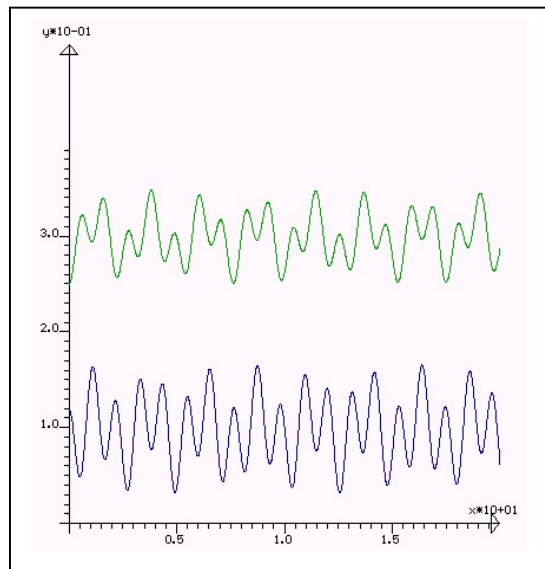
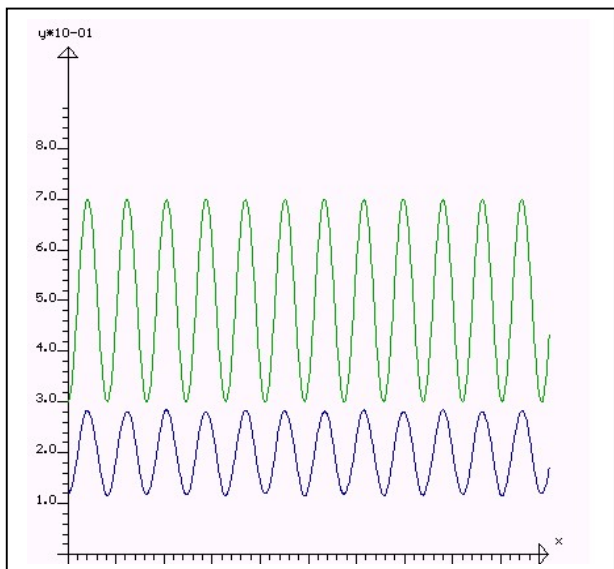
Det er næppe tænkeligt, at man kan finde en analytisk løsning til ligningerne (1.6) – (1.7), så vi skal i stedet forsøge os med en numerisk løsning med et matematik program, der kan levere grafiske løsninger til 2. ordens differentiaalligninger. Først reducerer vi ligningerne lidt:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -(k_1 + k)x_1 + k_2x_2 + k_1l_1 - k_2l_2 \quad \Leftrightarrow \\ \ddot{x}_1 &= -\frac{(k_1 + k)}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 + \frac{k_1l_1 - k_2l_2}{m_1} \end{aligned}$$

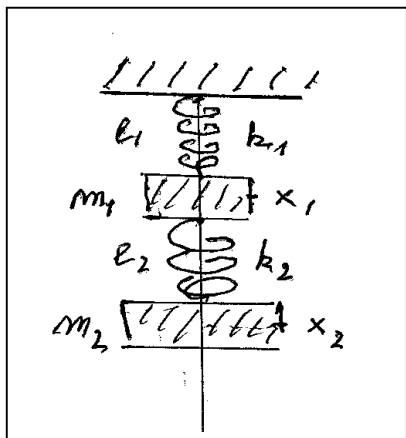
$$m_2 \ddot{x}_2 = -(k_2 + k_3)x_2 + k_2 x_1 + k_2 l_2 - k_3(l_3 - l) \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{(k_2 + k_3)}{m_2} x_2 + \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{k_2 l_2 - k_3(l_3 - l)}{m_2}$$

Ligningerne vil blive løses numerisk, med et DOS matematikprogram (fra 1996) skrevet i Turbo 7.0. Nedenfor er vist to løsninger med henholdsvis en svag og en stærk kobling.



## 2. Lodrette koblede harmoniske svingninger



Denne gang opskriver vi bevægelsesligningerne direkte fra de virkende fjederkræfter og tyngdekraften

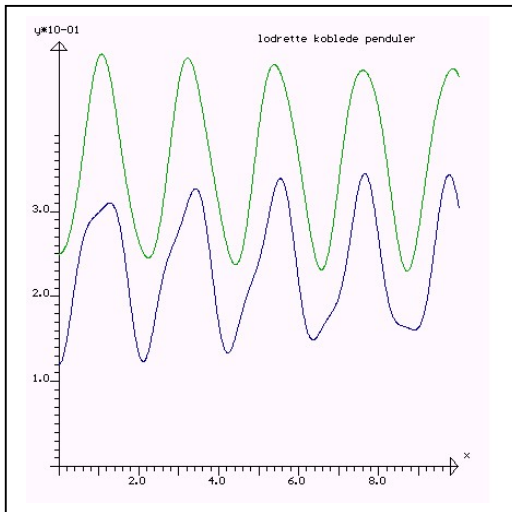
$$F_1 = m_1 \ddot{x}_1 = k_1(l_1 - x_1) - k_2(l_2 - (x_2 - x_1)) + m_1 g \quad (2.1)$$

$$F_2 = m_2 \ddot{x}_2 = k_2(l_2 - (x_2 - x_1)) + m_2 g$$

Som reduceres til

$$m_1 \ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + k_1 l_1 - k_2 l_2 + m_1 g \quad (2.2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2 x_1 - k_2 x_2 + k_2 l_2 + m_2 g$$



Figuren til venstre viser en computer genereret grafisk løsning af differentialligningerne (2.2) med nogle passende konstanter.

Der er stort set uendelig mange muligheder, når man laver en numerisk løsning, det mest afgørende er vel om det er en svag eller stærk kobling.

Afvigelserne fra den harmoniske svingning er mindre end den vi havde for de koblede vandrette svingninger.