Kap. I Kinematik

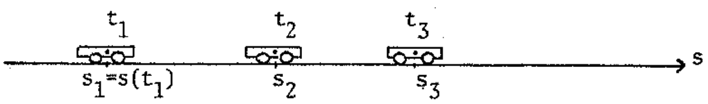
1. Retlinet bevægelse

Kinematik betyder egentlig bevægelseslære, og vi skal her se på hvorledes man matematisk beskriver bevægelse. Som matematisk værktøj spiller differential- og integralregningen en helt central rolle. Kinematik kan derfor betragtes som én af de mange indgange til differentialregningen. Vi skal her nøjes med at indføre noget af det matematiske apparat, dog uden en streng matematisk behandling.

I det følgende skal vi mest betragte bevægelsen af punktformige legemer, som vi kalder partikler. For udstrakte legemer vil vi foreløbig antage, at alle legemets punkter udfører den samme bevægelse. Ethvert af legemets punkter kan derfor beskrives som bevægelsen af en partikel. En sådan bevægelse af et udstrakt legeme kaldes for en translation.

En retlinet bevægelse er, som navnet udsiger, en bevægelse, der foregår på eller langs med en ret linie. Man kan f.eks. tænke på en vogn, der kører på en skinne, men det kan også være et lodret kast i tyngdefeltet.

Figur 1.1

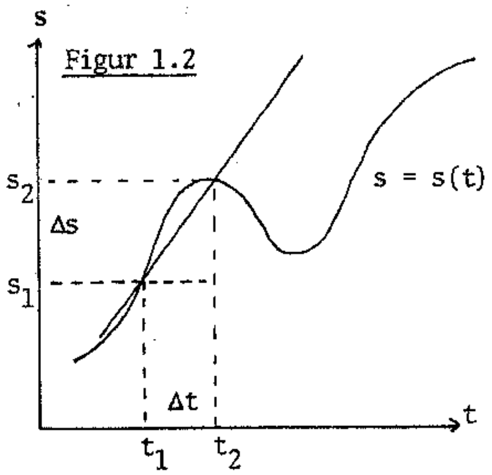


Legemets bevægelse kan beskrives ved, at man til ethvert tidspunkt t angiver legemets position s på en absissakse, der er lagt langs med bevægelsen.

Fælles for alle bevægelser er, at legemet har netop én position s til ethvert tidspunkt t. s er derfor en funktion af t, og man skriver $s = s(t)$.

Normalt benytter man i fysikken det samme bogstav s for den uafhængige variabel og for funktionen, men man kunne også have skrevet $s = f(t)$.

Kap I



For at få en oversigt over en given bevægelse, kan man tegne det grafiske billede af funktionen $s = s(t)$ i et koordinatsystem. Grafen kan f.eks. se ud som vist på figuren.
Af grafen kan man umiddelbart aflæse forskellige egenskaber ved bevægelsen.
Hvis funktionen er voksende, bevæger man sig forlæns med positiv hastighed. Modsat, hvis funktionen er aftagende, bevæger man sig baglæns med negativ hastighed.
At funktionen er injektiv, betyder i tilfældet med bevægelse, at man ikke passerer den samme position flere gange.
Endvidere er det klart, at skal man fra positionen s_1 til positionen s_2 på absisseaksen, er det nødvendigt at passere alle mellemliggende positioner. For det grafiske billede af funktionen betyder dette, at grafen må hænge sammen uden spring i funktionsværdierne. Man beskriver denne egenskab ved funktionen $s = s(t)$ ved at sige, at den er kontinuert.
Endelig kan grafen for $s(t)$ ikke have spidser, da dette ville betyde, at man kørte såvel forlæns som baglæns til samme tidspunkt. Denne sidste egenskab udtrykker man ved at sige, at funktionen $s = s(t)$ er differentiabel.

Vi har tidligere indført hastigheden som den tilbagelagte vej pr. tidsenhed.
Hvis en partikel har positionerne $s_1 = s(t_1)$ og $s_2 = s(t_2)$ til tidspunkterne t_1 og t_2 , definerer man middelhastigheden v_m i tidsintervallet $\Delta t = t_2 - t_1$ ved brøken:

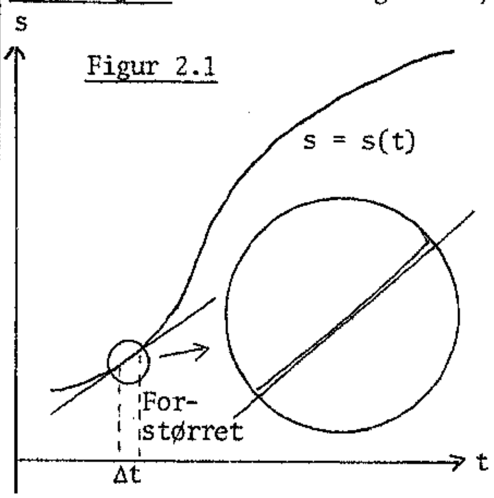
(1.3) $$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}$$

De tre skrivemåder i (1.3) er helt ækvivalente. Vælges de to tidspunkter t_1 og t_2 som antydet på figur (1.2), og tegnes linien (sekanten) gennem punkterne (t_1,s_1) og (t_2,s_2) vil middelhastigheden v_m være lig med hældningskoefficienten for sekanten.

2. HASTIGHEDEN SOM DIFFERENTIALKVOTIENT AF VEJFUNKTIONEN.

Hvis hastigheden i en bevægelse ændrer sig med tiden, er det rimeligt at tale om hastigheden til et bestemt tidspunkt. Dette kaldes for den øjeblikkelige hastighed eller momentanhastigheden.
Det er måske ikke vanskeligt at acceptere indførelsen af begrebet momentanhastighed for en ujævn bevægelse. Det er imidlertid ikke helt ukompliceret at give en matematisk definition af momentanhastigheden. Dette ligger i at hastighed er defineret som en gennemkørt vejstrækning Δs divideret med en forbrugt tid Δt. Problemet er naturligvis, hvilken vejstrækning Δs man skal vælge for at bestemme hastigheden til et bestemt tidspunkt.

For at klare dette problem benytter man sig af det såkaldte grænseværdibegreb. Det er nemlig klart, at man kan vælge tidsintervallet



Figur 2.1

Δt så lille, at bevægelsen kan betragtes som jævn i Δt. (Dette kommer ud på at betragte bevægelsens graf som retlinet i intervallet Δt). Dette er skematisk vist på figuren.
Hvis man vælger et stadigt mindre tidsinterval Δt, vil middelhastig- $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ nærme sig en konstant værdi. Denne værdi kaldes så for grænseværdien for $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ når Δt går imod nul.

Lad os antage, at vi vil bestemme momentanhastigheden til tidspunktet t_o. I formlen for middelhastigheden (1.2) sætter vi derfor $t_1=t_o$ og $t_2 = t_o+\Delta t$. Herved bliver $\Delta s = s(t_o+\Delta t)-s(t_o)$.
Momentanhastigheden v_o til tidspunktet t_o indføres da ved følgende:

Kap I

2.2 Definition:
Ved momentanhastigheden v_0 til tidspunktet t_0 forstår man grænseværdien af middelhastigheden $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ når Δt går imod nul.
Matematisk skriver man dette på følgende måde:

$$\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} \rightarrow v_0 \quad \text{for} \quad \Delta t \rightarrow 0 \qquad \text{eller blot} \tag{2.2}$$

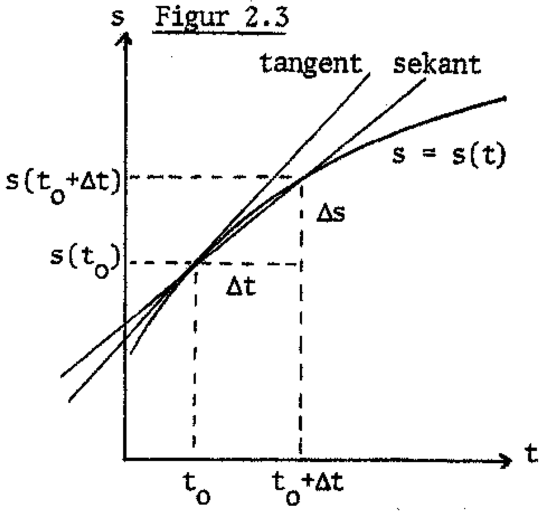
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow v_0 \quad \text{for} \quad \Delta t \rightarrow 0 \qquad \text{eller}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_0$$ (læses:"limes delta s....for Δt gående imod nul")

Ifølge ovenstående definition bestemmes momentanhastigheden v_0 altså som "middelhastigheden" i et "uendeligt lille" tidsinterval Δt.
Det bemærkes udtrykkeligt, at man ikke kan udregne momentanhastigheden ved at indsætte $\Delta t = 0$. Når $\Delta t = 0$ er nemlig også $\Delta s = 0$, og forholdet $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{0}$ er udefineret. Det er derfor nødvendigt at indføre momentanhastigheden som en grænseværdi ved en "grænseovergang".
Hvorledes grænseværdier bestemmes i parksis vil blive belyst i nogle følgende eksempler.

I matematikundervisningen kaldes grænseværdien for $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ for $\Delta t \rightarrow 0$ for differentialkvotienten for funktionen $s = s(t)$ i punktet t_0.
Differentialkvotienten af funktionen $s(t)$ kan betegnes på flere måder. I matematikundervisningen anvendes oftest betegnelsen $s' = s'(t)$, som læses:" s mærke af t ". s' kaldes også den afledede funktion.
I fysikundervisningen anvender man derimod oftere $\frac{ds}{dt}$ til at betegne differentialkvotienten af funktionen $s = s(t)$. ds og dt kaldes for differentialer af s og t. (Hermed en forklaring på selve ordet differentialkvotient, der altså er en "kvotient mellem to differentialer). ds og dt kan da opfattes som "uendelig små" tilvækster på s og t, svarende til at de "endelig små" tilvækster betegnes Δs og Δt.

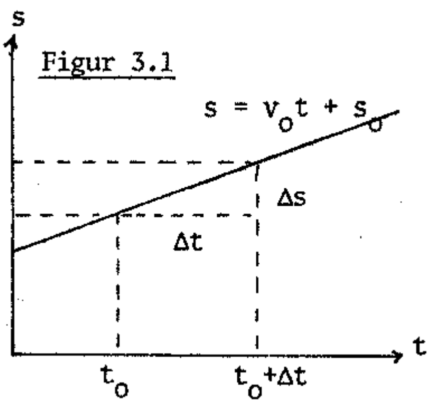
Før vi går over til at udregne differentialkvotienten for nogle simple funktioner, vil vi omtale den geometriske betydning af differen-



Figur 2.3

tialkvotienten ud fra grafen for funktionen $s = s(t)$.
På figuren er tegnet grafen for en vejfunktion. Endvidere er tegnet en sekant gennem punkterne $(t_0, s(t_0))$ og $(t_0+\Delta t, s(t_0+\Delta t))$.
Som omtalt, er middelhastigheden $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ i intervallet Δt lig med hældningskoefficienten for sekanten.
Hvis vi lader Δt gå imod nul, vil sekanten dreje og nærme sig en grænsestilling, efterhånden som det ene punkt på grafen nærmer sig til det andet.
Grænsestillingen af sekanten, når Δt går imod nul, kaldes for en <u>tangent</u> til grafen for funktionen $s = s(t)$ i punktet t_0.
Da tangentens hældningskoefficient må være grænseværdien for sekantens hældningskoefficient for Δt gående imod nul, kan vi slutte, at <u>momentanhastigheden $v_0 = s'(t_0)$ geometrisk kan beregnes som hældningskoefficienten for tangenten til grafen for $s(t)$ i punktet t_0</u>.

3. EKSEMPLER PÅ BEREGNING AF MOMENTANHASTIGHED



Figur 3.1

<u>3.1 Eksempel: Jævn retlinet bevægelse.</u>
For en jævn retlinet bevægelse er vejfunktionen som bekendt: $s(t) = v_0 t + s_0$
Grafen for funktionen er en ret linie i s-t diagrammet.
Da hastigheden i bevægelsen er konstant, er momentanhastigheden lig med v_0 *til alle tidspunkter. For eksemplets skyld vil vi nu vise, at man trivielt opnår det samme resultat ved at anvende definitionen (2.2) på momentanhastighed.*

Kap I

Grænseovergangen foretages bekvemt i tre skridt.

1) Man bestemmer tilvæksten Δs ud fra t_0 svarende til tilvæksten Δt.

$$\Delta s = s(t_0+\Delta t)-s(t_0) = v_0(t_0+\Delta t)+s_0 - (v_0t_0+s_0) = v_0\Delta t$$

2) Man danner brøken $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_0\Delta t}{\Delta t} = v_0$$

3) Man foretager grænseovergangen ved at lade Δt gå imod nul

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_0 \rightarrow v_0 \quad \text{for } \Delta t \rightarrow 0$$

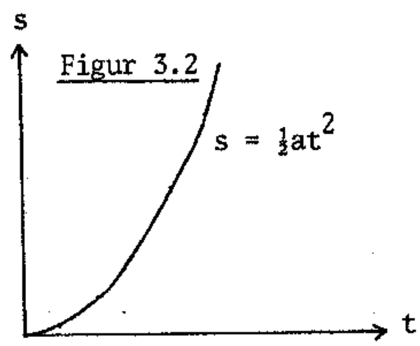
(Brøken $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ afhænger i dette tilfælde hverken af t_0 eller Δt)

Vi finder derfor, som vi forventede, at momentanhastigheden er lig med den konstante hastighed v_0 i bevægelsen.
Endvidere følger det af ovenstående, at differentialkvotienten af en lineær funktion er lig med hældningskoefficienten for den rette linie, som er funktionens graf. Dette er udtrykt i formlerne:

$$(3.1.1) \qquad s(t) = v_0t + s_0 \Rightarrow s'(t) = \frac{ds}{dt} = v_0$$

Hvis $v_0 = 0$ er funktionen konstant. Af (3.1.1) følger det da specielt, at differentialkvotienten af en konstant funktion er nul.

$$(3.1.2) \qquad s(t) = s_0 \Rightarrow s'(t) = 0$$



Figur 3.2

3.2 Eksempel: Konstant accelereret bevægelse uden begyndelseshastighed.
I bind 1 har vi vist, at denne bevægelse har vejfunktionen: $s(t) = \frac{1}{2}at^2$, hvor a betegner bevægelsens acceleration.
Vi vil nu vise, at vi faktisk finder hastighedsfunktionen: $v(t) = at$ ved

at differentiere s(t).
Ligesom før fortager vi grænseovergangen i tre skridt, idet vi dog i dette tilfælde dropper index o på tiden t.
1) Δs bestemmes ud fra et fastholdt, men iøvrigt vilkårligt t.

$$\Delta s = s(t+\Delta t)-s(t) = \tfrac{1}{2}a(t+\Delta t)^2-\tfrac{1}{2}at^2 = at\Delta t + \tfrac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

2) Man danner brøken $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{at\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2}{\Delta t} = at + \tfrac{1}{2}a\Delta t$$

3) Man lader Δt gå imod nul.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = at + \tfrac{1}{2}a\Delta t \rightarrow at \quad for \quad \Delta t \rightarrow 0$$

Af dette slutter vi, at momentanhastigheden $v(t) = s'(t) = at$ i overensstemmelse med hvad vi vidste fra bind 1.
Det grafiske billede af funktionen $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ er en parabel, som skitseret på figuren forrige side.
Det bemærkes, at vi ud fra den geometriske fortolkning af differentialkvotienten med resultatet ovenfor er i stand til at bestemme hældningskoefficienten for tangenten til et vilkårligt punkt på grafen for funktionen $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ som $s'(t) = at$.
F.eks. vil hældningskoefficienten for tangenten til grafen for funktionen $s(t) = 5t^2$ i punktet med $t = \frac{1}{2}$ være: $s'(\frac{1}{2}) = 10\cdot\frac{1}{2} = 5$.

Sammenholder vi resultaterne fra eksempel 3.1 og 3.2, er vi i stand til at udregne differentialkvotienten af et vilkårligt 2. grads polynomium.

$$(3.2.1) \qquad s(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \Rightarrow s'(t) = \frac{ds}{dt} = at + v_0$$

Vi kunne nu fortsætte med at bestemme differentialkvotienten for en lang række funktioner, der dukker op i fysiske problemstillinger, men dette er et omfattende program, som gennemføres i matematikundervisningen. Samtidig udleder man en del regneregler for differentiation, men alt dette vil vi, (bortset fra nogle få regler, som er anført nedenfor), henvise til en matematikbog eller en matematisk formelsamling.

3.3 Regneregel: Man differentierer ledvis.

$$s(t) = f(t)+g(t) \Rightarrow s'(t) = f'(t)+g'(t)$$

3.4 Regneregel: En konstant kan flyttes "udenfor" ved differentiation.

$$s(t) = kf(t) \Rightarrow s'(t) = kf'(t)$$
$$s(t) = f(kt) \Rightarrow s'(t) = kf'(kt)$$

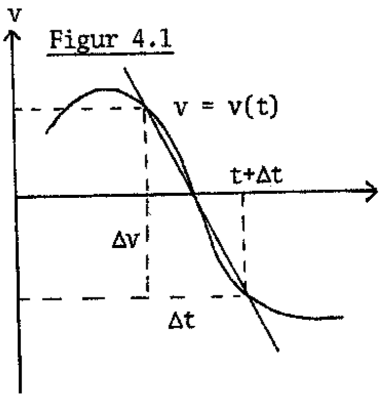
3.5 Regneregel: Differentiation af t^n, $\sin t$ og $\cos t$.

$$f(t) = t^n \Rightarrow f'(t) = nt^{n-1}$$
$$f(t) = \sin t \Rightarrow f'(t) = \cos t \quad \text{og} \quad f(t) = \cos t \Rightarrow f'(t) = -\sin t$$

4. ACCELERATION SOM DIFFERENTIALKVOTIENT AF HASTIGHEDSFUNKTIONEN.

For en given vejfunktion $s = s(t)$ tænker man sig, at man har fået bestemt hastighedsfunktionen $v = v(t)$, f.eks. ved at differentiere $s(t)$. Vi viste i § 3 at $v(t) = s'(t)$.

Figur 4.1



Vi har i bind 1 defineret accelerationen i en retlinet bevægelse som hastighedstilvæksten pr. tidsenhed. Acceleration a er således defineret ud fra forholdet:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{4.2}$$

Δv er den hastighedstilvækst en partikel får i tidsintervallet Δt.

Hvis bevægelsen ikke er konstant accelereret, afhænger forholdet $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ af hvor stor Δt er, og definitionen (4.2) kan ikke umiddelbart anvendes. Formlen (4.2) vil angive middelaccelerationen $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ i tidsintervallet Δt.

I analogi med indførelsen af momentanhastigheden, burde det være oplagt, at indføre momentanaccelerationen som grænseværdi for middelaccelerationen for Δt gående imod nul.

4.3 Definition:

Ved momentanaccelerationen (den øjeblikkelige acceleration) til tidspunktet t_o, forstår man grænseværdien af middelaccelerationen $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, når Δt går imod nul. Dette skrives matematisk:

(4.3) $$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_o+\Delta t)-v(t_o)}{\Delta t} \to a \quad \text{for} \quad \Delta t \to 0 \qquad \text{eller}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad a(t_o) = v'(t_o)$$

Accelerationen beregnes åbenbart som differentialkvotienten af hastighedsfunktionen: $a(t) = v'(t)$ eller $a = \frac{dv}{dt}$. Da $v(t) = s'(t)$ eller $v = \frac{ds}{dt}$, kan man bestemme accelerationen ved at differentiere vejfunktionen $s = s(t)$ to gange. Dette udtrykkes i formlerne:

(4.4) $$a(t) = s''(t) \quad \text{eller} \quad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Svarende til at $s'(t)$ kaldes for den 1. afledede, kaldes $s''(t)$ for den 2. afledede af funktionen $s(t)$.

Ved anvendelse af differentialkvotienter kan Newton's 2. lov skrives på flere forskellige måder.

(4.5) $$F = m\,a \qquad F = m\frac{dv}{dt} \qquad F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

4.6 Eksempel.

Vi har tidligere betragtet et lodret kast med konstant acceleration $a = -g$, og begyndelseshastighed v_o. (Bind 1 side 19).
Vejfunktionen for denne bevægelse er: $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o t$.
Ved anvendelse af differentiation finder man:

$$v = \frac{ds}{dt} = -gt + v_o \qquad og \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$

I overensstemmelse med formlerne side 19 i bind 1.

Kap I

4.7 Øvelse:

Vi vil undersøge en såkaldt harmonisk svingning, hvor positionen s er givet ved funktions-forskriften: $s(t) = \sin\pi t$. Vi kan antage, at tiden t måles i sekunder og positionen s angives i cm, men af hensyn til overskueligheden udelader vi enhederne i dette eksempel.

1) Udregn funktionsværdierne $s(0,0)$, $s(0,2)$, $s(0,4)$,...$s(2,0)$ og tegn på grundlag af disse støttepunkter grafen for funktionen i intervallet $[0,2]$. Dette gøres ved at afsætte punkterne på millimeterpapir og forbinde dem med en glat kurve. Vælg f.eks. enheden 5 cm både på 1. og 2. aksen.

2) Beskriv ud fra grafen, hvorledes positionen varierer i forhold til nulpunktet på s-aksen, og i hvilke tidsrum bevægelsen er forlæns, og i hvilke tidsrum bevægelsen er tilbagegående.

3) For grafisk at bestemme, hvorledes hastigheden i bevægelsen varierer, tegner man, så godt som det er muligt, tangenterne til kurven gennem punkterne, svarende til absisserne 0,1 0,3 0,5 ... 1,9. For hver tangent, bestemmer man hældningskoefficienten ved at udmåle et Δt og Δs med lineal, og udregne hældningen som $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

4) Vi har i § 2 vist at hastigheden kan udregnes som hældningskoefficienten for tangenten. Vi har derfor grafisk fået bestemt hastighederne $v(0,1)$ $v(0,3)$ ...$v(1,9)$. På grundlag af disse punkter tegnes grafen for bevægelsens hastighedsfunktion på millimeterpapir. (Vælg samme enhed på 1. aksen som før, og vælg f.eks. enheden 2 cm = 1 cm/s på 2. aksen). Grafen tegnes som en glat kurve, der ligger så tæt op af de afsatte punkter som muligt.

5) Vurder ud fra hastighedsfunktionens graf, hvornår accelerationen er positiv (skubber fremad) og negativ (bremsende).

6) Accelerationen til tidspunkterne 0,0 0,2 0,4 ... 2,0 udregnes nu efter samme metode som i 3), idet man tegner tangenterne til hastighedsfunktionens graf gennem punkterne med de angivne tidspunkter. På grundlag af de udregnede accelerationer, tegnes accelerationsfunktionens graf på millimeterpapir. (Vælg samme enhed på 1. aksen som før, og vælg f.eks. ½ cm = 1 cm/s^2 på 2. aksen).

7) I det foregående har vi fået tegnet grafen for hastigheds- og accelerations-funktionen ud fra vejfunktionens graf. I § 3 og 4 har vi imidlertid lært at v(t) og a(t) også kan bestemmes ved differentiation af s(t). Ud fra regnereglerne 3.4 og 3.5 på side 8 følger det nemlig:

$s(t) = \sin \pi t \Rightarrow v(t) = s'(t) = \pi \cos \pi t$ *og endvidere*

$v(t) = \pi \cos \pi t \Rightarrow a(t) = v'(t) = -\pi^2 \sin \pi t$

Udregn funktionsværdierne for de ved differentiation bestemte udtryk for v(t) og a(t) til de samme tidspunkter som de grafisk bestemte funktionsværdier. Tegn endelig på dette grundlag graferne for v(t) og a(t) på det samme milimeterpapir som før, og sammenlign resultaterne.

5. INTEGRATION AF BEVÆGELSESLIGNINGERNE. STAMFUNKTION OG INTEGRAL

I de foregående afsnit har vi vist, hvorledes man kan bestemme hastighedsfunktionen v(t) og accelerationsfunktionen a(t) ved at differentiere vejfunktionen s(t).

Som regel er man dog i den situation, at det er accelerationsfunktionen, der er kendt. Dette vil være tilfældet, når de kræfter der virker på en partikel er kendte, således at accelerationen kan beregnes ud fra Newtons 2. lov: $F_{res} = m \cdot a$.

Det almindelige problem er derfor, at accelerationen a(t) er kendt, og man ønsker at fastlægge bevægelsen, d.v.s. man ønsker at bestemme funktionerne v(t) og s(t). Vi vil først vise, hvorledes man fastlægger v(t) ud fra a(t) samt nogle begyndelsesbetingelser.

Givet funktionen a(t): Opgaven er altså at bestemme v(t), således at differentialkvotienten af v(t) er lig med a(t): $v'(t) = a(t)$

Man siger i dette tilfælde, at v(t) er en stamfunktion til a(t).

Bestemmelse af en stamfunktion til en funktion kaldes at integrere

Som hovedregel er det en væsentlig vanskeligere opgave at bestemme en stamfunktion, end det er at differentiere.

Lad os antage, at vi på en eller anden måde har gættet en stamfunktion til a(t). Vi kalder denne funktion for A(t).

Kap I

Der gælder altså at $A'(t) = a(t)$. Da differentialkvotienten af konstant funktion er nul, vil enhver af funktionerne $v(t) = A(t) + c$, hvor c er en vilkårlig konstant, også være en stamfunktion til $a(t)$. Dette bevises ved differentiation, idet

$$v'(t) = A'(t) + 0 = a(t)$$

I matematikken vises iøvrigt, at samtlige stamfunktioner til $a(t)$ kan skrives på formen

(5.1) $$v(t) = A(t) + c \quad , c \in R$$

Vi kan således indse, at selv om accelerationsfunktionen er kendt, er hastighedsfunktionen kun fastlagt på nær en (arbitrær) konstant. For at fastlægge $v(t)$ fuldstændig må vi foruden $a(t)$ kende hastigheden $v(t_o) = v_o$ til et givet tidspunkt t_o.
Ud fra et fysisk synspunkt er dette indlysende, idet accelerationen er et mål for hastigheds-tilvæksten, men ikke for størrelsen af hastigheden selv.
Indsættes nu $v(t_o) = v_o$ i udtrykket $v(t) = A(t) + c$, kan man bestemme c. $v_o = A(t_o) + c \Rightarrow c = v_o - A(t_o)$. Denne værdi for c indsættes nu tilbage i ligningen $v(t) = A(t) + c$, heraf fås:

(5.2) $$v(t) = v_o + A(t) - A(t_o) \quad \Leftrightarrow$$

(5.3) $$v(t) = v_o + \Big[A(t)\Big]_{t_o}^{t}$$

Den firkantede parentes er blot en forkortet skrivemåde for differensen $A(t)-A(t_o)$. Eftersom $A(t)$ var bestemt som en vilkårlig stamfunktion til $a(t)$, er det oplagt at erstatte den firkantede parentes med et symbol (integraltegn), der indeholder funktionen $a(t)$. Ligningen (5.3) skrives følgelig:

(5.4) $$v(t) = v_o + \int_{t_o}^{t} a(t)dt$$

Det nye symbol $\int$ kaldes for et integraltegn, og udtrykket ovenfor læses som "det bestemte integral af funktionen a(t) fra t_0 til t." t_0 og t er tal som kaldes henholdsvis nedre og øvre grænse for integralet. Som angivet i ligningerne (5.4), (5.3) og (5.2) udregnes integralet ved at man bestemmer en stamfunktion A(t) til "integranden" a(t) og udregner den firkantede parentes som funktionsværdien af A(t) i den øvre grænse minus funktionsværdien i den nedre grænse.

Lad os antage, at vi har fået bestemt hastighedsfunktionen $v = v(t)$, og at vi ønsker at finde vejfunktionen $s = s(t)$. Vi antager endvidere at vi kender positionen til tidspunktet t_0: $s_0 = s(t_0)$.
Da de to udsagn;

$$v'(t) = a(t) \quad v_0 = v(t_0) \quad \text{og} \quad s'(t) = v(t) \quad s_0 = s(t_0)$$

matematisk set er helt analoge, følger det af overvejelserne fra (5.1) til (5.4), at vejfunktionen s(t) kan bestemmes som integralet af hastighedsfunktionen v(t).

(5.6) $$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

Forklaringen på, at der optræder et "dt" under integraltegnet vil blive givet i næste afsnit.

5.7 Eksempel. For at gøre regningerne mere overskuelige, vil vi udelade enhederne i dette eksempel, men antage at vi konsekvent regner i S.I. enheder.
For en bremsende bevægelse er accelerationsfunktionen $a(t) = -2t$, så længe $v \geq 0$. Endvidere oplyses at $v(2) = 12$ og $s(2) = 0$.
a) Bestem hastigheds- og vejfunktion.
b) Find bremsetiden og bremselængden.
Løsning: Hastigheds- og vejfunktionen udregnes ud fra integralformlerne (5.4) og (5.6).

$$v(t) = 12 + \int_2^t -2t\,dt = 12 + \left[-t^2\right]_2^t = 12 - t^2 - (-2^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$v(t) = 16 - t^2$$

Kap I

$$s(t) = 0 + \int_2^t (16-t^2)dt = \left[16t - \frac{1}{3}t^3\right]_2^t = 16t - \frac{1}{3}t^3 - (32 - \frac{8}{3})$$

$$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 16t - \frac{88}{3}$$

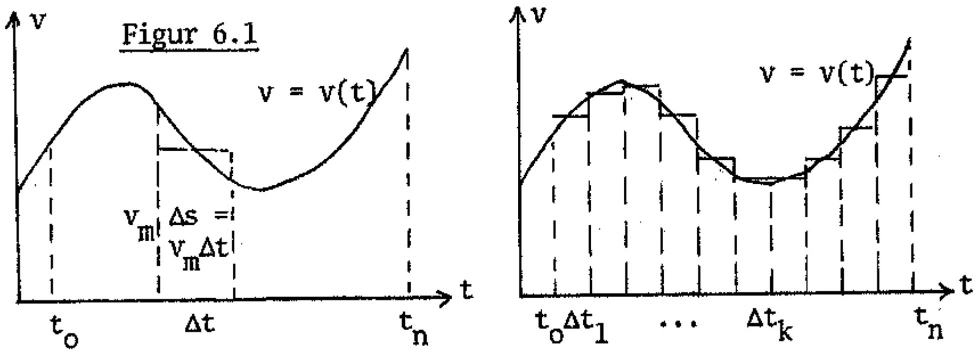
Bremsetiden kan bestemmes ved at sætte $v = 0$.

$$0 = 16 - t^2 \Leftrightarrow t = 4 \quad (da\ t \geq 0)$$

Bremsetiden er således 2 sek. da bremsningen startede ved $t = 2$ sek.
Bremselængden udregnes som $s(4) = -\frac{1}{3}64 + 64 - \frac{88}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ meter.

6. GEOMETRISK FORTOLKNING AF INTEGRALET

Ligesom vi havde en geometrisk fortolkning af differentialkvotienten som hældningskoefficientem for en tangent, skal vi nu give en geometrisk fortolkning af integralet som arealet under en kurve.
Nedenfor er skitseret grafen for en hastighedsfunktion $v = v(t)$.



Af ligningen $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ følger at $\Delta s = v_m \Delta t$. Den tilbagelagte vej Δs i tidsrummet Δt er lig med middelhastigheden v_m i Δt gange med Δt. Geometrisk er $v_m \Delta t$ lig med arealet af det rektangel på figuren, som har højde v_m og bredde Δt. Dette areal er desuden lig med arealet af den strimmel under grafen for $v(t)$ som har bredden Δt.
Skal vi derfor bestemme den tilbagelagte vej fra tidspunktet t_o til tidspunktet t_n, kan det åbenbart gøres ved at dele intervallet $[t_o, t_n]$ op i række små delintervaller med bredde $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$; beregne den tilbagelagte vej Δs i hvert af disse små intervaller ved den ovenfor anførte metode, og så addere alle de små bidrag $\Delta s_k = v_k \Delta t_k$, hvor v_k betegner middelhastigheden i tidsintervallet Δt_k.

Man udtrykker normalt dette ved hjælp af summationstegn.

$$(6.2) \qquad s(t_n) - s(t_o) = \sum_{k=1}^{k=n} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{k=n} v_k \Delta t_k$$

Den tilbagelagte vej udregnet som summen ovenfor er lig med arealet af alle de små rektangler som vist på figuren side 14.
Samtidig er summen lig med arealet under kurven fra t_o til t_n.
Normalt kender man ikke middelhastighederne v_k i tidsintervallerne Δt_k. Hvis intervallerne Δt_k er små, kan man imidlertid med god tilnærmelse erstatte middelhastigheden v_k med $v(t_k')$, hvor t_k' er et vilkårligt tal i intervallet Δt_k.
Med substitutionen $v_k \approx v(t_k')$ kaldes summen (6.2) for en middelsum for funktionen $v = v(t)$ i intervallet $[t_o, t_n]$.
Når intervallerne Δt_k er små, er middelsummen med god tilnærmelse lig med den tilbagelagte vej i intervallet $[t_o, t_n]$. Samtidig er middelsummen en tilnærmet værdi for arealet under kurven i samme interval. Jo mindre man gør intervallerne Δt_k, jo bedre bliver begge tilnærmelser.

Man kan nu sammenholde de to udtryk (5.6) og (6.2) for den tilbagelagte vej, hvor vi har tilnærmet v_k med $v(t_k')$ i (6.2)

$$(6.3) \qquad s(t_n) = s_o + \int_{t_o}^{t} v(t)dt \quad \text{og} \quad s(t_n) = s(t_o) + \sum_{k=1}^{k=n} v(t_k')\Delta t_k$$

Sammenligner man de to udtryk ovenfor, ser man at integralet kan opfattes som grænseværdi for en sum, når alle Δt_k'erne går imod nul, samtidig med at leddenes antal går imod uendelig. I denne grænse erstattes Δt_k med symbolet dt, og dette er forklaringen på, at dt optræder under integraltegnet.
Da grænseværdien af summen i (6.3) må være lig med det eksakte udtryk for arealet under kurven, er det bestemte integral også et eksakt udtryk for dette areal.

Vi minder om, at vi i bind 1 netop benyttede den geometriske fortolkning af integralet til at udlede formlerne for den konstant ac-

Kap I

celererede bevægelse. Vil vil nu anvende integral-formalismen til endnu engang at udlede disse formler.

6.4 Eksempel. Konstant accelereret bevægelse.

Vi ser på en bevægelse, hvor $a(t) = a$ (konstant), $v(0) = v_o$ og $s(0) = s_o$. Ifølge formlerne (5.4) og (5.6) fås:

$$v(t) = v_o + \int_0^t a\,dt = v_o + \Big[at\Big]_0^t = v_o + at$$

$$s(t) = s_o + \int_0^t v(t)dt = s_o + \int_0^t (v_o + at)dt = s_o + \Big[v_o t + \tfrac{1}{2}at^2\Big]_0^t$$

$$= s_o + v_o t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Ved anvendelse af integralregning finder man således de velkendte formler for bevægelse med konstant acceleration.

$$v(t) = v_o + at \qquad s(t) = s_o + v_o t + \tfrac{1}{2}at^2$$

6.5 Opgaver.

En cyklist accelererer først fra hvile og kører derefter et stykke tid med konstant hastighed, hvorefter han bremser, indtil han holder stille. Accelerationsfunktionen for bevægelsen kan skrives:

$$a(t) = \begin{cases} 1{,}0\ m/s^2 & \text{for} \quad 0\,s \leq t \leq 5\,s \\ 0\ m/s^2 & \text{for} \quad 5\,s < t \leq 30\,s \\ -2{,}0\ m/s^2 & \text{for} \quad 30\,s < t \leq \text{(indtil han holder stille)} \end{cases}$$

a) Bestem hastigheds- og vejfunktionen for hele bevægelsen.

b) Angiv de tidspunkter hvor hastigheden er 12 km/h.

c) Hvor lang en strækning tilbagelægges ialt.

2) En ford Granada (0 - 100 km/h på 14 sek) holder ved et stoplys. I det øjeblik lyset skifter, bliver Granadaen passeret af en 2 CV, der kører med den konstante hastighed 54 km/h. Føreren af Granada'en jokker speederen i bund og sætter efter 2 CV'eren.

a) Hvor langt fra stoplyset bliver 2 CV'eren indhentet?