Kinematik

Indhold

Ole Witt-Hansen 1975 (2015)

1. Retlinet bevægelse

Kinematik betyder egentlig bevægelseslære. I kinematikken søger man at give en fuldstændig matematisk beskrivelse af en bevægelse. I denne beskrivelse indføres to vigtige begreber, nemlig hastighed og acceleration.

I det følgende skal vi betragte bevægelsen af et legeme, som vi normalt opfatter som en partikel, dvs. et legeme, som matematisk set kan beskrives ved et punkt. For udstrakte legemer, skal vi kun betragte sådanne, hvor alle legemets dele (partikler) udfører den samme bevægelse. En sådan bevægelse, kaldes for en translation.
Retlinet bevægelse betyder naturligvis, at legemet bevæger sig på eller langs en ret linie. Langs denne linie, aflæser man partiklens position s på en orienteret *s-akse*, kaldet en absisseakse.

Fig. 1.1

Partiklens bevægelse på *s-aksen* kan beskrives ved en regneforskrift, så man til ethvert tidspunkt kan udregne partiklens position s.
Er partiklens position s_0 til tidspunktet t_0, skriver man $s_0 = s(t_0)$. Symbolet $s(t)$, læses "s af t".
Idet, der til ethvert tidspunkt t svarer netop én position s, siger man at s er en funktion af t.

Kender man funktionen $s(t)$, kan man udrenge positionen til ethvert tidspunkt t, og man har dermed en matematisk beskrivelse af bevægelsen.

Man får et grafisk overblik over funktionen $s = s(t)$, ved at tegne det grafiske billede i et koordinatsystem. Dette opnås ved at afsætte t ud af 1. aksen (absisseaksen) og s ud af 2. aksen (ordinataksen). Koordinatsystemet kaldes da for et $s - t$ diagram.

Det grafiske billede fremkommer ved, at man til en passende række tidspunkter: t_1, t_2, t_3,..... t_n , afsætter de tilsvarende positioner: s_1, s_2, s_3,..... s_n.
Når man har afsat punkterne: (t_1, s_1), (t_2, s_2) (t_3, s_3),.... (t_n, s_n) i $s - t$ diagrammet, forbindes punkterne med en glat kurve, og den fremkomne kurve er det grafiske billede af funktionen $s = s(t)$.

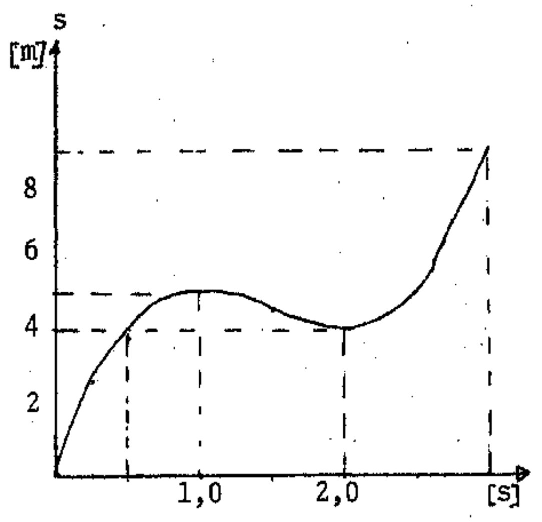


Fig. 1.2

På figuren (1.2) er vist grafen for en vejfunktion, med forskriften $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, hvor tiden er målt i sekunder og positionen s i meter.
F.eks. er $s(2) = 2\cdot 2^3 - 9\cdot 2^2 + 12\cdot 2 = 4$.
Efter 2 sek., befinder man sig altså 4 m fra start,

$s(0)=0$. Af grafen kan f.eks. aflæses, at $s(1\ s) = 5\ m$ at man kørte forlæns fra $t = 0\ s$ til $t = 1$ s, og igen fra $t = 2$ s til $t = 3s$, mens man bakkede fra $t = 1\ s$ indtil $t = 2\ s$, at positionen $s = 4$ m blev passeret 2 gange, ($t = 0{,}5$ s og $t = 2{,}0\ s$) og at alle positioner mellem 4 m og 5 m blev passeret 3 gange.
Som vi skal se, er hastigheden i bevægelsen ikke konstant, for så skulle grafen være en ret linie.

I intervallet fra 0 s til 2,0 s er bevægelsen bremsende, (hastigheden aftagende) og fra 2 s til 3 s accelererer bevægelse (voksende hastighed).

2. Jævn retlinet bevægelse

Den simpleste bevægelse er en jævn retlinet bevægelse, hvor den tilbagelagte vej s er ligefrem proportional med den forbrugte tid t. I dette tilfælde er vejfunktionen: $s = s(t)$.

$$s = v_0 t \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = \frac{s}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{s}{v_0} \tag{2.1}$$

v_0 er den konstante hastighed i bevægelsen. Af den 2. ligning kan man se, at hastigheden i den jævne bevægelse kan udregnes som den tilbagelagte s vej divideret med den forbrugte tid t.

Endvidere ses det, at SI-enheden for hastighed er *m/s,* (meter per sek), nemlig SI-enheden for længde divideret med SI-enheden for tid.

2.2 Eksempel
En bil starter kl. 0, og kører derefter med den konstante hastighed 72 *km/h*.
a) Opskriv i SI-enheder sammenhængen mellem den forbrugte tid t og den tilbagelagte vej s.
b) Find endvidere, hvor langt bilen kommer på 5 sek., og hvor lang tid det tager den at køre 120 *km*.

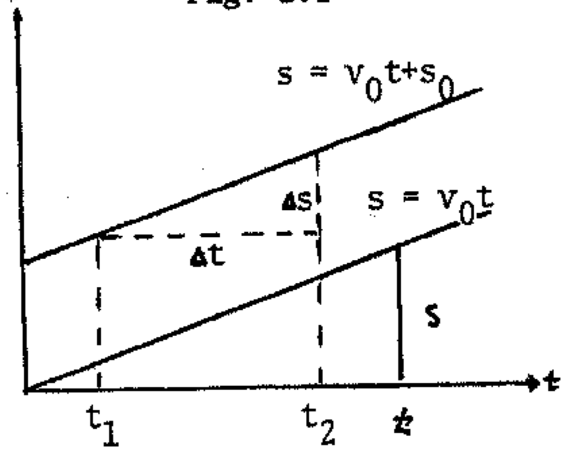
Løsning:

$$v_0 = 72\ km/h = 72\frac{1000m}{3600\ s} = 20\ m/s \qquad s = 20\,[m/s]\,t$$

$$s(5\ s) = 20\ m/s \cdot 5\ s = 100\ m. \qquad t = \frac{s}{v_0} = \frac{120\,10^3 m}{20\ m/s} = 6000\ s = 1\ h\ \ 40\ \min$$

$s(t) = v_0 t$ er det, man i matematikken kalder et eksempel på en lineær funktion.
Indtegner man vejfunktionen $s(t) = v_0 t$ for en jævn bevægelse i et s - t diagram, vil punkterne ligge på en ret linie gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt (0,0).

Fig. 2.2



Dette kan efterprøves ved t tegne graferne for nogle retlinede bevægelser.
Man kan dog også let indse dette, ved at bemærke, at det gælder, (som vist på den nederste figur), at forholdet mellem absissen t og ordinaten s må være den samme for alle s og t, idet t og s er sider i ensvinklede trekanter, (hvor forholdet mellem ensliggende sider som bekendt er konstant).
Hvis den jævne bevægelser ikke begynder i (0,0), men starter i s_0 (for $t = 0$), så den tilbagelagte vej til tiden t er $s - s_0$.
Der må derfor gælde, at $s - s_0 = v_0 t$.

For en vilkårlig jævn retlinet bevægelse gælder.

(2.3)	$s = v_0 t + s_0$	$\Leftrightarrow$	$s - s_0 = v_0 t$

Grafen for $s = v_0 t + s_0$, findes ved at forskyde grafen for $s = v_0 t$ stykket s_0 op ad s-aksen, som vist på fig. 2.2. Hastigheden v_0 kan ikke længere bestemmes som s/t, men hastigheden kan bestemmes, hvis man kender positionerne s_1 og s_2 til tidspunkterne t_1 og t_2. Der gælder nemlig at:

$$s_1 = v_0 t_1 + s_0 \quad \text{og} \quad s_2 = v_0 t_2 + s_0$$

Ved at subtrahere den første ligning fra den sidste og sætte v_0 udenfor en parentes får man:

(2.4)	$s_2 - s_1 = v_0(t_2 - t_1)$	$\Leftrightarrow$	$v_0 = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$	$\Leftrightarrow$	$v_0 = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

Vi har i det sidste udtryk anvendt symbolet Δ (stort græsk ”D”), i udtrykkene: $\Delta s = s_2 - s_1$ og $\Delta t = t_2 - t_1$ Det læses som: ”delta s” og ”delta t”.
Anvendelsen af Δ symbolet er meget udbredt i fysikken og matematikken, hvor det betegner en tilvækst, således er Δs den tilvækst man skal give til s_1 for at få s_2.
Tilvækst Δ er ikke det samme som forskel, idet tilvækst altid, altid betegnes, som det man slutter med minus det man begynder med.
En tilvækst kan, (på trods af navnet) godt være negativ, og tilvæksten skal regnes med fortegn. Hvis man f.eks. bremser, får man en negativ hastighedstilvækst.
Det sidste af udtrykkene (2.4) $v_0 = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ er det, som man i almindelighed anvender som definition.

Hastigheden er den tilbagelagte vej, divideret med den forbrugte tid.

På figur (2.2) forrige side er vist, hvordan man kan aflæse Δs og Δt.
Geometrisk kaldes forholdet $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ for hældningskoefficienten for den rette linie, så hastigheden er hældningskoefficienten for linien $s = v_0 t + s_0$ i $s - t$ diagrammet.

2.5 opgave
A og B skal begge nå færgen i færgeby, som ligger 100 *km* borte.
A og B starter samtidig i bil, og A har beregnet, at han netop når færgen, hvis han kører de 100 *km* med konstant hastighed 80 *km/h*.
B har et ærinde 45 *km* fra start, som tager 10 *min*, men han håber at nå færgen, hvis han kører med 90 *km/h* (landevej) før opholdet og resten af vejen med 110 *km/h* (motorvej)..

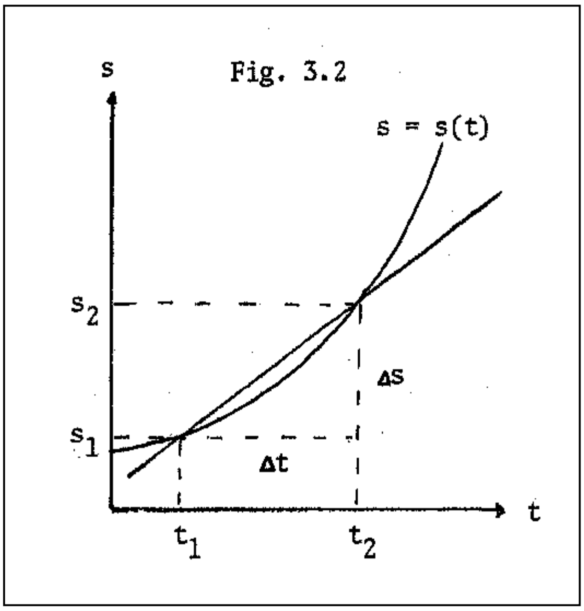
a) Hvornår afgår færgen fra det tidspunkt, hvor A og B starter?
b) Når B færgen? Hvornår er B i Færgeby?
c) Indtegn graferne for A og B's bevægelse i et s - t diagram., og aflæs af graferne, hvor og hvornår de passerer hinanden.
d) Udregn ud fra bevægelsesligningerne de nøjagtige tidspunkter, hvor de passerer hinanden.

3. Ujævn bevægelse

Hvis hastigheden i bevægelsen ikke er konstant, kaldes bevægelsen for ujævn.
Figuren (3.2) på næste side illustrerer et eksempel på en ujævn bevægelse.

Hvis et legeme har positionerne s_1 og s_2 til tidspunkterne t_1 og t_2 , definerer man middelhastigheden v_m (den gennemsnitlige hastighed) i tidsrummet $\Delta t = t_2 - t_1$, som:

(3.1) $$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Som vist på figuren, kan man geometrisk bestemme middelhastigheden, som hældningskoefficienten for den linie, som forbinder punkterne (t_1 , s_1) og (t_2 , s_2).

Den viste figur svarer til en positiv hastighed, men hastigheden kan naturligvis være negativ, hvilket betyder at man bevæger sig "baglæns", og at den viste linie på figuren ville "pege nedad".

For en ujævn bevægelse kan man med tilnærmelse finde hastigheden til et givet tidspunkt, f.eks. t_0, ved at bestemme middelhastigheden i et meget lille tidsinterval Δt omkring t_0. Man kan sige, at tidsintervallet skal være så lille, at bevægelsen kan antages at være jævn i intervallet, hvilket er det samme som at grafen kan betragtes som retlinet i intervallet Δt .

I matematikken definerer man momentanhastigheden ved differentialkvotienten af $s(t)$, hvilket betyder grænseværdien af brøken $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, når " Δt går imod nul".

4. Konstant accelereret bevægelse

Hvis man kender hastigheden til ethvert tidspunkt kender man hastighedsfunktionen $v = v(t)$.
På samme måde som for vejfunktionen $s = s(t)$,kan man tegne grafen for hastighedsfunktionen i et $v - t$ (hastighed – tid diagram).
Eksempler på sådanne grafer er vist på side 7 figur 5.1.
På samme måde, som den jævne bevægelse, (hvor strækningen s er proportional med tiden t, $s = v_0 t$) er den mest simple bevægelse, er den mest simple ujævne bevægelse den, hvor hastigheden er v er proportional med tiden t. $v = a \cdot t$, hvor konstanten a, kaldes for accelerationen i bevægelsen.
Som det var tilfældet med definition af hastighed, er den generelle definition af accelerationen formuleret ved hjælp af tilvækster. Definition af acceleration.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Hvis v_0 er hastigheden til $t = 0$, så er $\Delta t = t$ og $\Delta v = v - v_0$. Heraf følger:

(4.1) $$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{v - v_0}{t} \quad \Leftrightarrow \quad v = a \cdot t + v_0$$

SI-enheden ses at være $(m/s)/s = m/s^2$

Det sidste udtryk, er det mest generelle og almindeligt anvendte for hastigheden i en konstant accelereret bevægelse. Hvis begyndelseshastigheden er 0, bliver udtrykket $v = a\,t$, som tidligere angivet.
Hvis v_1 og v_2 er hastighederne til tidspunkterne t_1 og t_2, gælder der ifølge det sidste udtryk i 4.1:

$$v_2 = at_2 + v_0 \;\wedge\; v_1 = at_1 + v_0 \quad \Rightarrow \quad v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1) \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Ofte formulerer man definitionen af acceleration, som hastighedstilvæksten per tidsenhed.

Hvis hastigheden aftager med tiden, er hastighedstilvæksten negativ, og dermed er accelerationen også negativ. Man taler da om en bremsende bevægelse.

Da accelerationen som givet ved 4.2 er konstant, omtales det som en konstant accelereret bevægelse eller en jævnt voksende bevægelse.
Hvis accelerationen ikke er konstant, må definitionsligningen $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ modificeres derhen til at betyde middelaccelerationen (den gennemsnitlige acceleration) i tidsintervallet Δt.
Accelerationen til et bestemt tidspunkt, kan bestemmes ved at lade tidsintervallet Δt gå imod 0.

Både vejfunktionen og hastighedsfunktionen er lineære funktioner, så grafen for hastighedsfunktionen $v = a\,t + v_0$ er en ret linie med hældningskoefficient a, og som skærer 2. aksen i v_0. Se figur 5.3 på side 8.

4.3 Eksempel
En bil accelerer fra hvile til 60 *km/h* på 12 sek. og bremser noget senere, så den fra hastigheden 72 *km/h* holder stille efter 4 sek. For begge tilfælde ønskes beregnet:
a) Den konstante acceleration i bevægelsen.
b) To ligninger, der viser hvorledes hastigheden afhænger af tiden.
c) Tidspunkter, hvor hastigheden er 18 km/h.
Løsning:

a)
$$a_{acc} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60\,km/h - 0\,km/h}{12\,s - 0\,s} = 5\,km/h\,s = \frac{5{,}0\,10^3\,m}{3600\,s^2} = 1{,}39\,m/s^2$$

$$a_{brems} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0\,km/h - 72\,km/h}{4{,}0\,s - 0\,s} = -18\,km/h\,s = -5{,}0\,m/s^2$$

b) $v_{acc} = 1{,}39\,[m/s^2]\,t$ $\qquad v_{brems} = -5{,}0\,[m/s^2]t + 20\,m/s$

I det sidste udtryk, har vi benyttet, at 72 *km/h* = 20 *m/s*. I den næste udregning anvender vi at 18 *km/h* = 5,0 *m/s*.

c) $v_{acc} = 5{,}0\,m/s \;\Leftrightarrow\; 5{,}0\,m/s = 1{,}39\,[m/s^2]\,t \;\Leftrightarrow\; t = 3{,}6\,s$

$$v_{brems} = 5{,}0\,m/s \quad \Leftrightarrow \quad 5{,}0\,m/s = -5{,}0\,[m/s^2]t + 20\,m/s \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{5{,}0\,m/s - 20\,m/s}{-5\;\,m/s^2} = 3{,}0\,s$$

Vi har set, hvorledes hastigheden afhænger af tiden for en konstant accelereret bevægelse, hvilket umiddelbart følger af definitionen af acceleration. Hvorledes positionen afhænger af tiden er lidt mere kompliceret. Vi kan ikke blot anvende, at $s = vt$, da v selv afhænger af tiden.
Før vi laver en teoretisk udregning, vil vi se på et forsøg, som kan belyse dette.

(*Nedenstående er en scanning af to sider i den gamle lærebog, da et forsøg, udført på denne måde, næppe vil få plads i under visningen længere*)

4.4 Eksempel. Forsøg med Galilei's faldrende.

Vi vil eksperimentelt undersøge et meget simpelt eksempel på en retlinet bevægelse, idet vi lader en kugle trille ned ad en skrå skinne (faldrende).

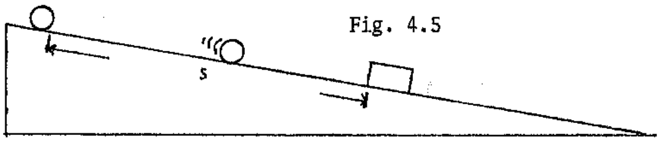


Fig. 4.5

Med en opstilling som vist ovenfor, kan man bestemme den tid t, som en kugle er om at tilbagelægge vejen s. Tiden måles f.eks. på et stopur, som startes samtidig med at kuglen begynder at trille, og afbrydes, når kuglen rammer stopklodsen. Strækningen s kan udmåles med en målestok, og iøvrigt varieres. Ved at gentage forsøget med forskellige palceringer af stopklodsen, opnår man en række punkter af bevægelsens s-t graf. Samhørende værdier af s og t indsættes i et skema, som vist nedenfor. Tallene henviser til et udført forsøg.

s: 0,10 m	0,20 m	0,30 m	0,50 m	0,70 m	1,00 m	1,40 m	1,80 m
t: 1,10 s	1,56 s	1,91 s	2,47 s	2,91 s	3,49 s	4,13 s	4,69 s

Talmaterialet behandles nu efter følgende retningslinier.

1. Samhørende værdier af position og forbrugt tid (t,s) afsættes i et et s-t diagram, og man tegner en pæn glat kurve, der ligger så tæt på punkterne som muligt. Kurven behøver ikke gå gennem alle punkterne på grund af måleusikkerheden.

2. Ud fra grafen bestemmes da hastigheden til en række tidspunkter. Med ovenstående talmateriale, f.eks. efter 0,5 s, 1,5 s, 2,5 s, osv. Dette kan man med tilnærmelse gøre ved at udregne middelhastigheden i et lille tidsinterval omkring det pågældende tidspunkt. Vil man f.eks. bestemme hastigheden efter 2,5 sek. udregner man middelhastigheden i intervallet fra t_1=2,25 s til t_2=2,75s ved at aflæse positionerne s_1 og s_2 fra grafen, udregne $\Delta s = s_2 - s_1$ og dividere denne strækning med tidsintervallet $\Delta t = t_2 - t_1$.

3. Afsæt i et nyt koordinatsystem, et v-t diagram, punkterne (t,v), hvor v er de udregnede hastigheder.

4. Hvorledes ligger punkterne på v-t grafen, sådan ca., og hvad kan man heraf slutte om sammenhængen mellem den hastighed v kuglen har, og den forbrugte tid t.

5. Karakteriser bevægelsen, og bestem accelerationen (størrelse og enhed) ud fra v-t diagrammet.

6. Vi vil nu undersøge nærmere, hvorledes s afhænger af t, og vi udregner først størrelsen t^2 for hver af de målte værdier, og indfører disse tal nedenunder t i skemaet. Afsæt nu positionen s, som funktion af t^2 i et nyt koordinatsystem (s-t^2 diagram).

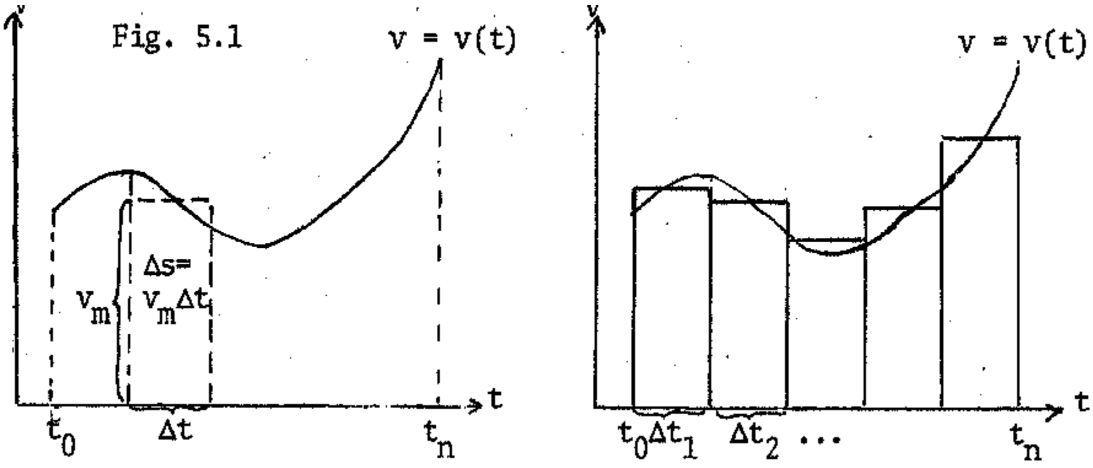
7. Hvorledes ligger punkterne på denne graf, og hvad kan vi heraf slutte om sammenhængen mellem s og t^2 for den pågældende bevægelse ?

8. Beregn hældningskoefficienten ud fra s-t^2 diagrammet, og opskriv sammenhængen mellem s og t^2 matematisk.

9. Sammenlign hældningskoefficienten med den tidligere fundne acceleration a. Angiv på grundlag heraf, hvad man må formode, at der gælder om sammenhængen mellem tilbagelagt vej s og forbrugt tid for en konstant accelereret bevægelse uden begyndelseshastighed.

5. Tilbagelagt vej ved en konstant accelereret bevægelse

I almindelighed kan det være en ret kompliceret matematik opgave at bestemme vejfunktionen $s(t)$, når hastighedsfunktionen $v(t)$ er kendt. Det matematiske værktøj kaldes for integration, og vi skal vende tilbage til sagen i 2g. Her skal vi blot angive en geometrisk metode, der tillader at beregne $s(t)$ ud fra $v(t)$ i nogle simple tilfælde. Nedenfor er tegnet grafen for hastighedsfunktionen for en retlinet, men i øvrigt vilkårlig bevægelse.



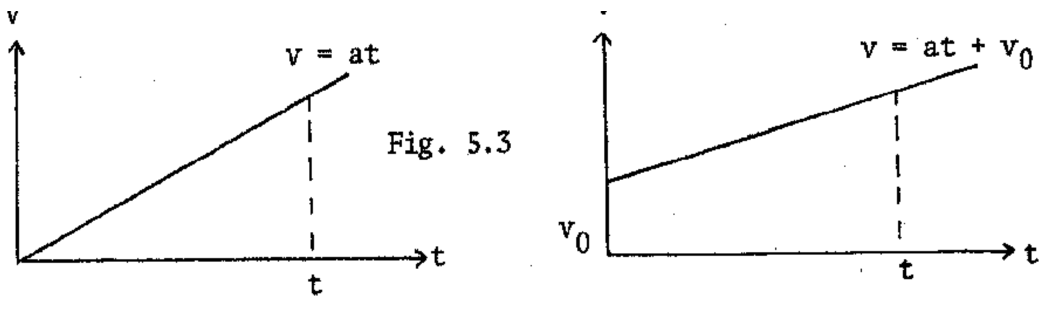
Vi minder om, at for en vilkårlig retlinet bevægelse kan den tilbagelagte vej Δs i tidsrummet Δt, skrives som: $\Delta s = v_m \Delta t$, hvor v_m er (middel)hastigheden i intervallet Δt.

Af grafen fremgår, at $\Delta s = v_m \cdot \Delta t$ kan udregnes geometrisk som arealet af et lille rektangel: højde v_m gange bredde Δt. Som figuren viser, svarer arealet af den lille strimmel med god tilnærmelse til arealet under grafen for hastighedsfunktionen $v(t)$ i tidsintervallet Δt, og tilnærmelsen bliver bedre jo mindre Δt er.

Hvis man så ønsker at udregne den tilbagelagte vej s i et længere tidsrum, f.eks. fra t_0 til t_n, så kan det gøres ved at dele intervallet $[t_0, t_n]$ op i en række små delintervaller Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 ,… Δt_n , og udregne den tilbagelagte vej $\Delta s_1 = v_1\, \Delta t_1$, $\Delta s_2 = v_2\, \Delta t_2$, $\Delta s_3 = v_3\, \Delta t_3$, …, $\Delta s_n = v_n\, \Delta t_n$ i hvert af disse intervaller. Summen af alle Δs'erne vil være den samlede tilbagelagt vej, men ifølge det foregående, vil det også være lig med arealet under grafen for $v(t)$ i intervallet $[t_0, t_n]$, som vist på den anden figur. Dette fører til følgende sætning (5.2):

Den tilbagelagte vej s i tidsintervallet fra t_0, til t_n kan geometrisk bestemmes som arealet under grafen for hastighedsfunktionen $v = v(t)$ *i* intervallet $[t_0, t_n]$.

I nogle tilfælde er det ret simpelt at bestemme arealet under v-t grafen, og det vil vi nu udnytte, hvad angår bevægelse med konstant acceleration.



Vi betragter først tilfældet: Konstant accelereret bevægelse uden begyndelseshastighed, som svarer til grafen til venstre.
Her gælder: $v = at$. For at bestemme den tilbagelagte vej s fra 0 til t, skal vi ifølge det foregående udregne arealet under linien $v = at$. Men det er arealet af en trekant med kateterne t og vt, så arealet er (½ højde x grundlinie): $s = \frac{1}{2}t \cdot at$ => $\underline{s = \frac{1}{2}at^2}$.

Vi ser dernæst på tilfældet konstant accelereret bevægelse med begyndelseshastighed v_0, som vist på grafen til højre. Hastighedsfunktionen er: $v = at + v_0$. Den tilbagelagte vej s er lig med arealet under linien fra 0 til t.
Arealet kan udregnes på to måder: Enten som arealet af et rektangel med siderne v_0 og t, som er v_0t plus arealet af en trekant med kateterne t og $at + v_0 - v_0 = at$, som er $\frac{1}{2}at^2$. Her med får man udtrykket for tilbagelagte vej: $\underline{s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t}$.

Arealet kan også udregnes som arealet af et trapez: (½højde x summen af de parallelle sider).
$s = \frac{1}{2}t\,(v_0 + at + v_0) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$.
Vi har antaget at begyndelsesposition $s(0) = 0$, men hvis begyndelsespositionen er $s(0) = s_0$, skal denne blot adderes til højre side af udtrykket for s.
Idet formlerne for konstant accelereret bevægelse er meget vigtige, samler vi dem nedenfor i skematisk form.

<u>5.3 Grundlæggende formler for bevægelse med konstant acceleration</u>

	Uden begyndelseshastighed	Med begyndelseshastighed v_0
Hastighed:	$v = at$	$v = at + v_0$
Position:	$s = \frac{1}{2}at^2$	$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$

Hvis man ønsker at kende den strækning, der er gennemløbet, når man har opnået en given hastighed, så kan det ikke umiddelbart lade sig gøre med formlerne ovenfor. Man bliver nemlig nødt til at bestemme tidspunktet først. Det er derfor ofte praktisk eller nødvendigt at kende sammenhængen mellem position s og hastighed v, uden at tiden t indgår. Dette kan gøres ved at eliminere t (fjerne t fra ligningerne) i hvert af de to tilfælde ovenfor.

Uden begyndelseshastighed:

$$t = \frac{v}{a} \quad \wedge \quad s = \tfrac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad s = \tfrac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad 2as = v^2$$

Med begyndelseshastighed:

$$t = \frac{v - v_0}{a} \quad \wedge \quad s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0 \quad \Rightarrow \quad s - s_0 = \tfrac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\frac{v - v_0}{a}$$

$$s - s_0 = \frac{v^2 + {v_0}^2 - 2vv_0 + 2vv_0 - 2{v_0}^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad 2a(s - s_0) = v^2 - {v_0}^2$$

Vi finder således to formler, som ofte benyttes sammen med 5.3 (*s-v-a* formler)

(5.4)	$2as = v^2$	$2a(s - s_0) = v^2 - {v_0}^2$

Af formlen 5.4 fremgår blandt andet, at den vejlængde, der skal køres for (med konstant acceleration) at opnå en bestemt hastighed, vokser proportionalt med kvadratet på hastigheden (proportionalt med v^2) ved positiv acceleration.
For negativ acceleration betyder formlerne, at bremselængden er proportional med kvadratet på hastigheden, noget som bekendt har betydning for fartgrænserne ved bilkørsel.

5.5 Eksempel
For en personbil bestemmes bremselængden til 12,5 *m* ved hastigheden 36 *km/h*. Vurder bremselængden ved motorvejshastighed 108 *km/h*.

Løsning: Vi antager at bremsningen sker ved den samme konstante acceleration i begge tilfælde.
Vi anvender den anden af formlerne i (5.4) til at bestemme accelerationen ud fra den første oplysning.
Vi indsætter derfor $s_0 = 0\ m$, $s = 12{,}5\ m$, $v = 0\ m/s$, $v_0 = 36\ km/h = 10\ m/s$

$$a = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2(s - s_0)} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-100\ m/s^2}{25\ m} = -4{,}0\ m/s^2$$

Bemærk, at a automatisk bliver negativ, når vi anvender formlen korrekt.

Vi kan nu bestemme bremselængden ved 108 *km/h* i, ved at indsætte a -4,0 m/s^2, $v = 0$, $v_0 = 108\ km/h = 3 \cdot 36\ km/h = 30\ m/s$ i den samme formel, men isolerer nu $s - s_0$.

$$s - s_0 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad s - s_0 = \frac{0 - 900\ m^2/s^2}{-4{,}0\ m/s^2} = 112{,}5\ m$$

Vi har bestemt bremselængden ved først at udregne accelerationen, men vi finder det samme resultat ved at bemærke, at bremselængden vokser proportionalt med kvadratet på hastigheden, sammenholdt med at 108 *km/h* = 3·36 *km/h*, så bremselængden vokser med en faktor 3^2, og 9·12,5 *m* = 112,5 *m*.

6. Frit fald og lodret kast

Det er en eksperimentel erfaring, at nær jordens overflade falder alle legemer uafhængig af udformningen og massen med den samme konstante acceleration.
Dette gælder dog kun i den udstrækning, at man kan se bort fra luftmodstanden, hvilket langtfra altid er tilfældet. Hvis faldet sker i vacuum (lufttomt rum), gælder det imidlertid uden indskrænkning.
Den konstante acceleration kaldes for tyngdeaccelerationen og betegnes med g.
Tyngdeaccelerationen varierer en smule fra sted til sted på jordens overflade. I Danmark har tyngdeaccelerationen værdien:

$$\boxed{g = 9{,}82\ m/s^2}$$

På normalstedet i Paris er tyngdeaccelerationen: $g_{Paris} = 9{,}80665\ m/s^2$

Et frit fald er en retlinet bevægelse med konstant acceleration g, og vælger vi at orientere s-aksen opad, gælder der ifølge (5.3) bevægelsesligningerne:

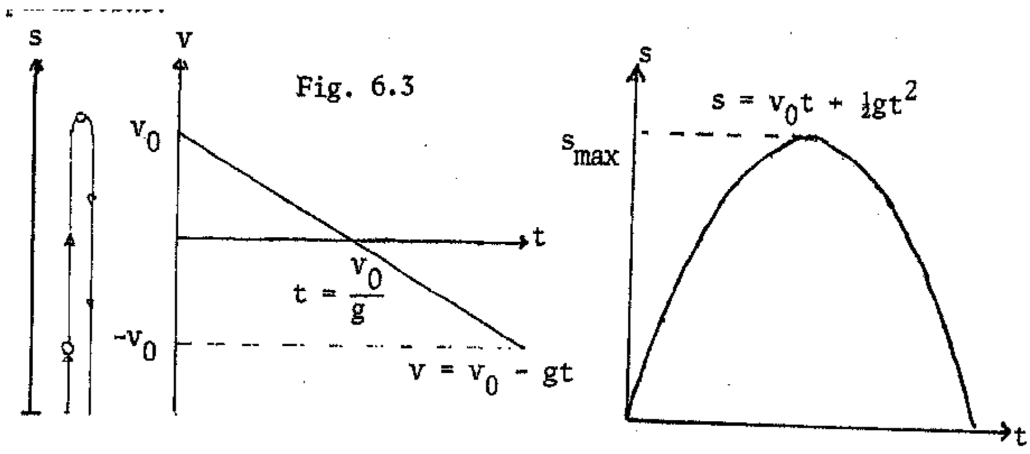
$$(6.1) \qquad a = -g \qquad v = v_0 - gt \qquad s = s_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

6.2 Eksempel
Det lodrette kast er et specielt eksempel på et "frit fald", hvor en partikel tildeles en begyndelseshastighed v_0 lodret opad, hvorefter partiklen bevæger sig kun påvirket af den konstante acceleration $-g$.
Vi skal her gennemregne et eksempel, hvor partiklen kastes op med en hastighed $v_0 = 20\ m/s$.

Idet partiklen starter sin bevægelse ved $s_0 = 0$ er bevægelsesligningerne ifølge 5.3.

$$a = -g \qquad v = v_0 - gt \qquad s = v_0 t - \tfrac{1}{2} gt^2$$

Det lodrette kast er skitseret nedenfor sammen med $v - t$ og $s - t$ graferne for bevægelsen.
$v - t$ grafen er en ret linie med hældning $-g$, mens $s - t$ grafen er en parabelbue



Vi vil nu udregne:
1. Hvor langt partiklen når op (stighøjden).
2. Hvor lang tid, der forløber inden partiklen vender tilbage, og hvad hastigheden er til dette tidspunkt.
3.Hastighed og acceleration, når partiklen befinder sig i den halve stighøjde.

Det er almindeligt, at man først laver udregningerne med bogstaver, og venter med at indsætte tallene til sidst. Gør man dette er det også langt lettere at opdage "regnefejl".

<u>Løsning</u>
1. Den øverste position, hvor partiklen vender er karakteriseret ved at hastigheden er 0.

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 - gt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v_0}{g}$$

Dette tidspunkt, indsættes da for at bestemme positionen s.

$$t = \frac{v_0}{g} \quad \wedge \quad s = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad s = v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^{\;2}}{2g}$$

Indsætter vi her $v_0 = 20\ m/s$ og $g = 9{,}82\ m/s^2$, finder man stighøjden.

$$s = \frac{(20\ m/s)^2}{2 \cdot 9{,}82\ m/s^2} = 20{,}4\ m$$

2. Når partiklen vender tilbage er $s = 0$. Dette indsætter vi ud udtrykket for s og løser en 2. gradsligning for at finde tidspunktet for tilbagekomst.

$$s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(v_0 - \tfrac{1}{2} g t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \ \vee \ t = \frac{2 v_0}{g}$$

Vi finder løsningen $t = 0$ i overensstemmelse med at partiklen afskydes til dette tidspunkt. Tidspunktet for tilbagekomst er da den anden løsning. Ved sammenligning ser man i øvrigt, at det er nøjagtig det dobbelte af den tid det tager for partiklen at nå sin øverste position.

Indsættes værdierne fra eksemplet fås: $t = \dfrac{40\ m/s}{9{,}82\ m/s^2} = 4{,}07\ s$

For at bestemme hastigheden ved tilbagekomsten, indsættes dette tidspunkt i udtrykket for v.

$$t = \frac{2v_0}{g} \quad \wedge \quad v = v_0 - gt \quad \Rightarrow \quad v = v_0 - g\left(\frac{2v_0}{g}\right) = -v_0$$

Partiklen vender altså tilbage med en hastighed, der er lige så stor men modsat rettet begyndelseshastigheden. Vi skal senere se, at dette er en konsekvens af en mere omfattende lov om energibevarelse.

3. Her kan man med fordel benytte relationen (5.4): $2a(s - s_0) = v^2 - v_0{}^2$. Vi indsætter a = -g og $s - s_0 = v_0{}^2/4g$ (Den halve stighøjde) og finder:

$$2(-g)\frac{v_0{}^2}{4g} = v^2 - v_0{}^2 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = \tfrac{1}{2}v_0{}^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\tfrac{1}{2}}v_0 \quad \vee \quad v = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}v_0$$

De to værdier svarer naturligvis til at partiklen er på vej op eller ned.
Indsættes $v_0 = 20\ m/s$ fås $v = 14{,}1\ m/s$ og $v = -14{,}1\ m/s$.

<u>Vi bemærker til slut, at partiklens acceleration er konstant lig med -*g* den samme under hele kastet.</u>

<u>6.3 Opgaver</u>

1. En formodentlig sindsforvirret mand springer ud fra toppen af rundetårn! (frit fald 36 *m*).
a) Hvor mange sekunder varer faldet?
b) Med hvilken hastighed (*km/h*) rammes fortovet?

2. En bil antages at bremse med konstant acceleration. Ved hastigheden 60 *km/h* er bremselængden 21 *m*.
a) Beregn accelerationen i m/s^2, og opskriv vej- og hastighedsfunktionen for bevægelsen under bremsningen.
b) Hvad bliver bremselængden, hvis hastigheden er 100 *km/h*?
I vådt føre nedsættes bremseevnen, dvs. accelerationen med 40%.
c) Beregn for vådt føre bremselængderne ved 60 *km/h* og 100 *km/h*.
Ofte taler man om den effektive bremselængde, i det man indregner det stykke som bilen bevæger sig i førerens reaktionstid, som sættes til 1 sek. fra en forhindring opdages.
d)Beregn de effektive bremselængder i tørt føre ved hastighederne 60 *km/h* og 100 *km/h*.

3. En stilladsarbejder taber en øl fra 4. sals højde. (Frit fald 17 *m*).
a) Hvor lang tid forløber der, før han hører flasken knuses. (Det antages at lydens hastighed er 340 *m/s*)

4. En Morris 850 (0 – 60 *km/h* på 10 *sek.*) holder ved et stoplys ved siden af en *BMW* 202. (0 – 60 *km/h* på 6,0 sek.)
Når lyset skifter accelerere de bege op til 60 *km/h*, og holder derefter denne hastighed.
a) Hvor langt foran Morris'en er *BMW'*en, når Morris'en når de 60 *km/h*.