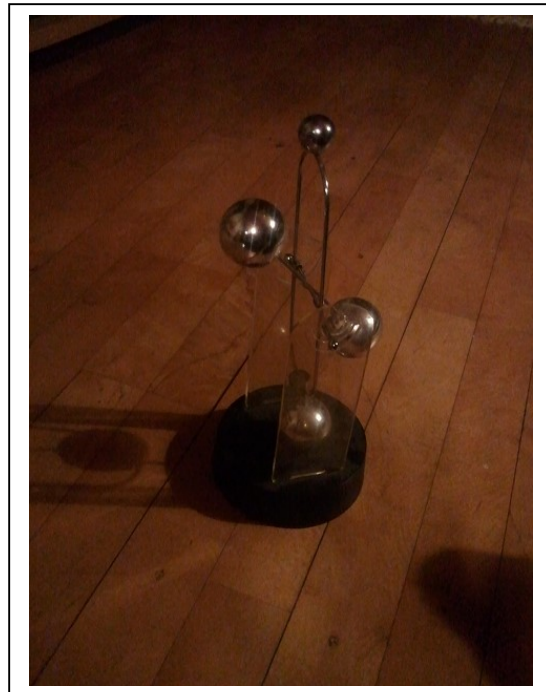


# Kaotisk kuglebevægelse En dynamisk analyse



## Kaotisk bevægelse

Kaotiske bevægelser opstår, når bevægelsesligningerne ikke er lineære. Interessen for kaotiske bevægelser opstod i midten af 80'erne, især på grund af artikler forfattet af Mandelbrot og Feigenbaum. Dette førte til en næsten eksplosiv interesse for "kaosteori", som strakte sig langt ud i den brede befolkning.

Det som man fandt ud af, (men som de fleste matematikere allerede vidste) var, at en meget lille ændring i en variabel i en ikke lineær bevægelsesligning, kan på sigt føre til en radikal anderledes ændring i udviklingen af et dynamisk system.

Udsagnet: "Hvis en sommerfugle basker med vingerne i Japan, kan det resultere i en tornado i det Caribiske hav". Et udsagn, som bestemt ikke skal tages bogstaveligt, men er mere egnet til at illustrere en kaotisk udvikling. Jeg hørte udsagnet blive anvendt første gang i Steven Spielbergs Jurassic Park fra 1993, hvor Spielberg, med stor virtuositet, lader mindre uheld, forglemmelser og svigt føre til kaos. Men "sommerfugleeffekten" har været anvendt (med vekslende held) i mange senere film.

Fra 1985 – 2000, var kaosteori noget der beskæftigede de fleste lige fra folkeskolen til universitetet. (Især de forunderlige grafiske afbildninger af Mandelbrot mængden).

Kaoteorien blev introduceret i snart alle grene af samfundslivet, fysik, økonomi, samfundsudvikling, aktiemarkedet og vekselvirkning mellem arter (også mennesker). Interessen klingede dog af efter 2000, idet det manglende gennembrud i konkrete resultater udeblev.

Formålet med denne artikel er ikke at komme ind på den teoretisk del af kaoteorien – overhovedet, men at levere et (legetøjs)eksempel på en kaotisk bevægelse, ved at opstille bevægelsesligningerne og løse dem numerisk og præsentere det grafisk.

Med grafiske computere, har det siden 1990 været muligt at give en grafisk repræsentation af de numeriske løsninger af differentiallyigninger der fører til kaotisk (dvs. ikke periodisk bevægelse) Et eksempel findes i [www.olewitthansen.dk/fysik/koblede\\_penduler.pdf](http://www.olewitthansen.dk/fysik/koblede_penduler.pdf). (Findes også i en udvidet version på engelsk).

Her skal vi vise et andet eksempel, nemlig et stykke legetøj, som jeg fik foræret for mere end 25 år siden. Vist på forsiden.

Det består af en ramme, hvor der er anbragt to metalkugler med forskellig masse foroven og forneden, så de danner et fysisk pendul. Inden i rammen er så placeret to kugler med samme masse på en stang. Stangen med kuglerne kan rotere frit om en vandret akse, der er fæstnet til rammen. I bunden af rammen er anbragt en magnet med nordpolen opad og i bunden af hver af de to roterende kugler er også anbragt en magnet, således at de bliver frastødt, når enhver af kuglerne passerer bunden af rammen.

Om frastødningskraften mellem de to nordpoler er det ikke muligt at opstille et eksakt analytisk teoretisk udtryk, og det har heller ingen reel indflydelse for kuglernes kaotiske bevægelse.

Blot ved vi at kraften aftager (kvadratisk?) med afstanden.

Drejningsvinklen for rammen betegnes  $\theta$  og drejningsvinklen for de roterende kugler betegnes  $\varphi$ .

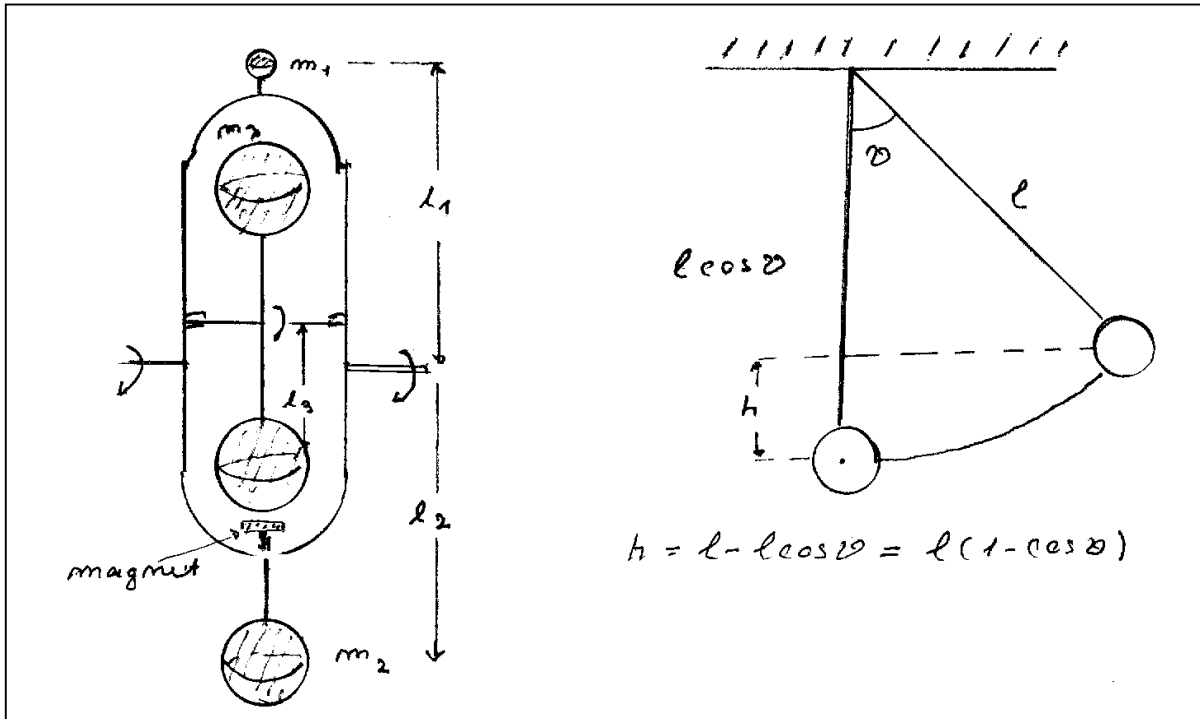
Vi har så valgt at lade kraften være proportional med  $\cos(\theta - \varphi)$ . Kraften er så maksimal for

$\theta - \varphi = 0$ , når en kugle passerer magneten og den er nul, når  $\theta - \varphi = \frac{1}{2}\pi$ . Et maksimum for

kraften (med modsat fortegn) nås dog også når  $\theta - \varphi = \pi$ , men det vil svare til at den anden kugle, passerer magneten, men fra den modsatte side, og det vil derfor igen være en frastødning.

$$(1.1) \quad F_{mag} = \mu \cos(\theta - \varphi)$$

Hvis  $F_{mag} = -\frac{\partial U_{mag}}{\partial \theta}$  så er  $U_{mag} = -\mu \sin(\theta - \varphi) + c$ . Dette udtryk vil blive anvendt nedenfor



Betegnelserne til apparatet (opstillingen) fremgår af figuren ovenfor.

Formålet med denne artikel er ikke så meget at give en korrekt beskrivelse af den faktiske bevægelse af kuglerne, men derimod at demonstrere, hvorledes man ved hjælp af Lagranges ligninger kan opstille bevægelsesligningerne for derefter at løse dem numerisk.

Grundlaget for Lagrange formalismen er ret detaljeret beskrevet i:

[www.olewitthansen.dk/Matematik/Variationsregning.pdf](http://www.olewitthansen.dk/Matematik/Variationsregning.pdf).

Til brug for Lagrange ligningerne opstiller vi først udtryk for den kinetiske energi  $T$  og potentielle energi  $U$  af systemet. Lagrange funktionen er:

$$(1.2) \quad L = T - U$$

bevægelsesligningerne bliver så udtrykt ved generaliserede koordinater  $q_i$ , og hvor en prik over en variabel som sædvanlig betyder differentiation med hensyn til tiden.

$$(1.3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Den potentielle energi har to bidrag. Et fra tyngden på rammen, som er et fysisk pendul, som består af de to kugler med masse  $m_1$  og  $m_2$ , samt et bidrag fra den magnetiske potentielle energi.

$$\begin{aligned}
 E_{kin}(1) &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 & E_{kin}(2) &= \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 & E_{kin}(3) &= 2 \frac{1}{2} m_3 l_3^2 \dot{\varphi}^2 \Rightarrow \\
 T &= E_{kin}(1) + E_{kin}(2) + E_{kin}(3) = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}^2 + m_3 l_3^2 \dot{\varphi}^2 \\
 (1.4) \quad U &= m_2 g l_2 (1 - \cos \theta) + m_1 g l_1 (1 - \cos(\theta + \pi)) - \mu \sin(\theta - \varphi) \\
 U &= (m_2 g l_2 - m_1 g l_1) (1 - \cos \theta) - \mu \sin(\theta - \varphi) + 2 m_1 g l_1 \\
 U &= (m_2 g l_2 - m_1 g l_1) (1 - \cos \theta) - \mu \sin(\theta - \varphi)
 \end{aligned}$$

Den sidste udeladelse af leddet  $2 m_1 g l_1$  skyldes at den potentielle energi kun er defineret på nær en konstant, som forsvinder ved differentiation. Vi skriver herefter:

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad T &= \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}^2 + m_3 l_3^2 \dot{\varphi}^2 = k_1 \dot{\theta}^2 + k_3 \dot{\varphi}^2 \\
 U &= k_4 (1 - \cos \theta) - \mu \sin(\theta - \varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \Leftrightarrow 2 k_1 \ddot{\theta} + k_4 \sin \theta - (-(-\mu \cos(\theta - \varphi))) = 0 \Leftrightarrow \\
 2 k_1 \ddot{\theta} + k_4 \sin \theta - \mu \cos(\theta - \varphi) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.7) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \Leftrightarrow \\
 2 k_3 \ddot{\varphi} + \mu \cos(\theta - \varphi) &= 0
 \end{aligned}$$

Problemet er således reduceret til at løse to relativ simple (i forhold til de koblede penduler) differentialligninger:

$$\begin{aligned}
 (1.8) \quad \ddot{\theta} &= -\frac{k_4}{2 k_1} \sin \theta + \frac{\mu}{2 k_1} \cos(\theta - \varphi) \\
 \ddot{\varphi} &= -\frac{\mu}{2 k_3} \cos(\theta - \varphi)
 \end{aligned}$$

Ligningerne vil blive løst numerisk med et Dos-program skrevet i Turbo Pascal 7 i 1996. Programmet er skrevet til Windows 95. Det kørte også i Windows 98, Programmet kan køre i Windows XP, dog uden skærmdumps som tidligere. Det kan ikke afvikles efter Windows XP.

Muligvis findes der programmer, som kan løse koblede 2. ordens differentialligninger, men jeg har ikke stødt på noget, som tilbyder de samme muligheder, som det DOS-program, som jeg selv lavede i 1996.

Vi måler længderne i cm og masserne i gram. Indsættes konstanterne:

$$m_1 = 20 \text{ g}, m_2 = 50 \text{ g}, m_3 = 10 \text{ g}, l_1 = 6 \text{ cm}, l_2 = 7 \text{ cm}, l_3 = 5 \text{ cm}, g = 100 \text{ cm} / \text{s}^2 \quad \mu = 10$$

Får man:

$$k_1 = 1585, \quad k_3 = 250, \quad k_4 = 23000,$$

Vi dividerer alle konstanterne med 1000 og får da:

$$(1.9) \quad \ddot{\theta} = -7.25 \sin \theta + \frac{\mu}{3.17} \cos(\theta - \varphi)$$

$$(1.10) \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\mu}{0.5} \cos(\theta - \varphi)$$

Resultaterne afhænger naturligvis af værdien af  $\mu$ . Vælger man  $\mu = 10$  får man graferne som vist nedenfor.

På den første graf er den blå graf den lodrette position af pendulet regnet fra bundstillingen. Det ses at det ligner en harmonisk svingning, men med (kaotisk) varierende amplitude.

Den grønne graf er derimod den lodrette position af den ene af de to kugler regnet fra omdrejningsaksen. Her er afvigelsen fra en harmonisk svingning markant.

Selv om kuglen bevæger sig op og ned, er bevægelsen langt fra en jævn cirkelbevægelse. Den er klart kaotisk.

På den anden graf er afbildet vinkelhastighederne af henholdsvis pendulet og den ene af kuglerne. Bevægelsen af kuglen fremtræder også på denne graf kaotisk.  
(billederne er af dårlig kvalitet, ja, det er foto af en 10'' skærm)

