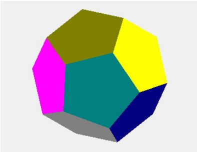
Kan båden kæntre

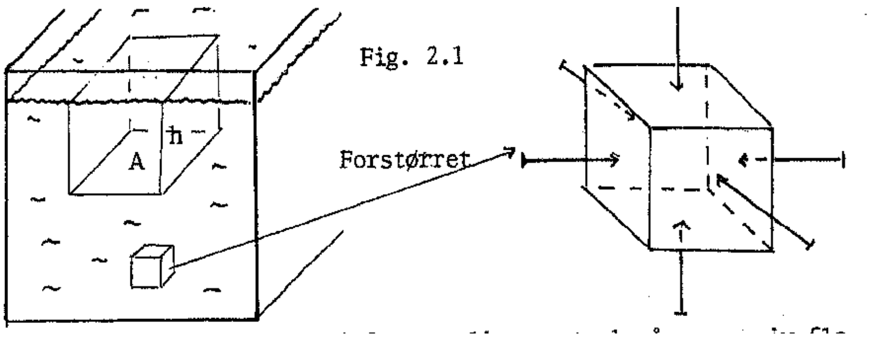
Dette er en artikel far min hjemmeside: www.olewitthansen.dk



Ole Witt-Hansen (2021)

Indhold

1. Tryk i væsker



<u>Tryk i væsker og gasser defineres på samme måde som tryk på en massiv flade, som normalkraften pr. arealenhed.</u>

<u>I en væske er trykket det samme i alle retninger i en bestemt dybde.</u>

Betragter vi nemlig et lille terningformet væskevolumen, som vist på figuren, og hvis tyngde vi kan se bort fra, og som er i hvile, må kraften og dermed trykket være det samme på modstående sider. Ellers ville væskevoluminet flytte sig i den største krafts retning. Trykket på to hosliggende sider må også være den samme, da væskevoluminet ellers ville deformeres (trykkes skævt).

<u>Idet trykket er det samme i alle retninger, taler man om trykket i en bestemt dybde.</u>

Vi søger nu at beregne trykket i væsken p_h i dybden h.
Væskens massefylde er ρ, og trykket ved væskens overflade er lig med atmosfæretrykket p_0.

Vi betragter nu et kasseformet væskerumfang, der har den ene flade sammenfaldende med overfladen af væsken. Se figur. Arealet af denne flade og bundfladen er A og højden (dybden) af kassen er h. Kassens rumfang er $V = A \cdot h$

Vi anvender nu definitionsligningen for tryk: $p = \dfrac{F_N}{A} \quad \Leftrightarrow \quad F_N = pA$.
Kraften på kassens overflade er trykket gange arealet: $F_0 = p_0 A$.
Massen af væsken i kassen: $m_v = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot h$
Tyngden af væsken i kassen er derfor: $F_T = m_v g = \rho \cdot A \cdot h \cdot g$.

Normalkraften på bundfladen af kassen må være lig med normalkraften på denne flade, som er kraften på overfladen plus tyngden af væsken i kassen.

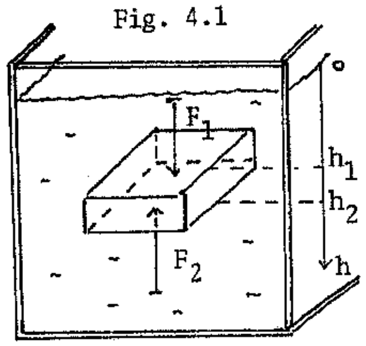
$$F_N = F_T + F_0 = \rho \cdot A \cdot h \cdot g + p_0 \cdot A$$

Idet $p = \dfrac{F_N}{A}$ finder vi trykket i dybden h, ved at indsætte F_N og dividere med A. Heraf fås:

(1.1)	$p_h = p_0 + \rho g h$	(Trykket i dybden h af en væske)

2. Arkimedes lov

Fig. 4.1



Figuren forestiller et kasseformet legeme, der er nedsænket i en væske med massefylde ρ.
Trykket på overfladen er og på bundfladen af kassen, kan bestemmes ud fra (1.1): $p_h = p_0 + \rho gh$.
Den øverste flade, befinder sig i dybden h_1, og bundfladen befinder sig i dybden h_2. Man finder heraf trykket på de to flader.

$$p_1 = p_0 + \rho gh_1 \quad \text{og} \quad p_2 = p_0 + \rho gh_2$$

De kræfter, der virker på de to flader, findes ved at gange med fladernes fælles areal A: $F_1 = p_1 A$ og $F_2 = p_2 A$.

Forskellen på kræfterne på underside og overside, kaldes for opdriften og betegnes F_{op}.
Vi udregner da F_{op}.

(2.1) $$F_{op} = F_2 - F_1 = (p_0 + \rho gh_2)A - (p_0 + \rho gh_1)A = \rho g(h_2 - h_1)A$$

Kassens rumfang er højde x grundflade: $V = (h_2 - h_1)A$. Massen af den væske, der kan være i kassen er $m_v = \rho V$. Vi kan derefter udtrykke opdriften:

(2.2) $$\boxed{F_{op} = \rho g(h_2 - h_1)A = \rho gV = m_v g \quad \Leftrightarrow \quad F_{op} = m_v g}$$

(2.2) udtrykker Arkimedes lov:

Et legeme, der er nedsænket i en væske er påvirket af en opdrift, som er lig med tyngden af den fortrængte væskemængden.

For bedre at forstå årsagen til opdriften, har vi detaljeret udledt Arkimedes lov, ud fra formlen for trykket i dybden af en væske. Men Arkimedes lov kan indses ved følgende ræsonnement, der ikke kun gælder for et kasseformet legeme, men for en vilkårlig udformning af det nedsænkede legeme.

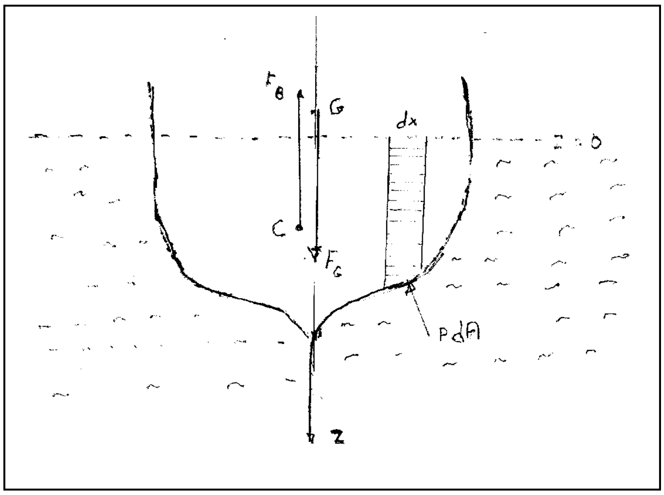
Afgrænser man nemlig et væskerumfang, som svarer til formen det nedsænkede legeme, er dette væskerumfang påvirket af tyngdekraften og trykkræfterne fra væsken. Da det er i hvile må trykkræfternes opdrift præcis modsvare tyngden af væsken $m_v g$.
Erstattes væskerumfanget nu af et virkeligt legeme med den samme form, vil trykkræfternes opdrift være den samme, fordi trykket i en væske kun afhænger af dybden og er uafhængigt af beholderens udformning. Altså kan vi slutte, at der gælder Arkimedes lov:

Ethvert legeme, der er nedsænket i en væske, er påvirket af en opdrift, som er lig med tyngden af den væskemængde, det fortrænger.

3. Ligevægt og opdrift på en båd

Vi skal herefter se på ligevægtsbetingelserne for en båd, hvor tyngdekraften er den eneste *ydre* kraft. Figuren nedenfor viser et tværsnit af båden, vinkelret på længdeaksen, som er valgt som den udadrettede y-akse. x-aksen, er langs vandlinjen. Og z-aksen er dybden.

Vi antager at skibets skrog er en cylindrisk overflade, som er parallel med y-aksen. G betegner bådens massemidtpunkt, og C betegner massemidtpunktet for den fortrængte væske, når båden er på ret køl.
Med F_B betegner vi den resulterende kraft, hidrørende fra det tryk, som vandet udøver på den del af båden, som er under vand. Vi skal så vise, at resultanten af trykket fra vandet går gennem C , som er massemidtpunktet for det fortrængte vand.
.



Lad $dA = dsdy$ være et overfladeelement på siden af båden og hvor ds er et linieelement af bådens tværsnit. Trykket $p(z)$ i dybden z er $p(z) = \rho gz$, hvor ρ er densiteten af vandet og g er tyngdeaccelerationen.. Trykket $p(z)$ virker vinkelret på overfladeelementet dA, og kraften på overfladeelementet er derfor $\rho gzdA$, og dets lodrette komponent er $\rho gzdA\cos(n, z)$, hvor n er den indadrettede normal til skroget.
Idet $dA\cos(n, z)$ numerisk lig med projektionen af dA på vandret, så er $\rho gzdA\cos(n, z)$ den lodrette komponent af kraftelementet, som kan skrives $\rho gzdxdy$. Opdriften kan herefter skrives:

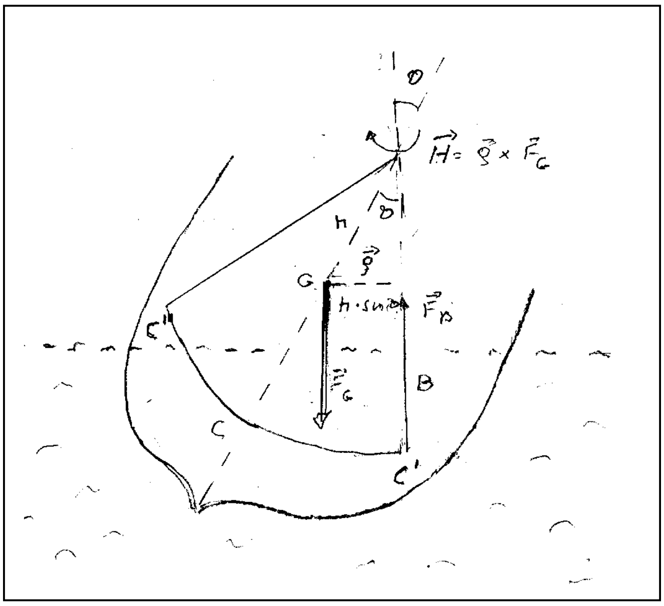
$$F_B = \rho g \int_{overflade} zdxdy = \rho g V_{båd\ under\ vand}$$

Denne ligning udtrykker naturligvis blot Archimedes lov.

De to vektorer, tyngden af båden $\vec{F}_G$ og opdriften $\vec{F}_B$ er modsat rettede, men i øvrigt lig med hinanden, så $\vec{F}_B = -\vec{F}_G$, idet båden jo er i hvile.
Når båden er i hvile, uden momenter fra vandet, ligger dets massemidtpunkt G og masemidtpunktet for den fortrængte væske langs samme lodrette linie.
Betingelsen $F_B = \rho gV = F_G = mg$, bestemmer vandlinen af båden.
Vi bemærker i øvrigt, at trykket, som virker på modsatte vandrette stykker af båden må være de samme, da trykket i den samme dybde er det samme og båden jo er i hvile.

6. Når båden krænger

Vi skal herefter se på dynamikken af båden, når den krænger.



Vi betragter en båd som er bragt ud af sin ligevægtsposition og som krænger frit fra side til side. Analysen kan godt gennemføres indenfor hydrostatikken, idet bevægelserne er så langsomme, at de kan betragtes som quasi-statiske.
Vi betragter således en krængning om den horisontale akse *y*-aksen. Symmetriplanen for båden danner nu en vinkel på θ med vertikalen.
Når båden krænger, vil formen af båden og positionen af den fortrængte væskes massemidtpunkt *C* varierer mellem C' og C'', C' er positionen, hvor krængningen stopper og C'' er slut positionen af krængningen til den modsatte side. Ved krængningen beskriver centrum af forskydningen en kurve med midtpunkt *C*. I figuren ovenfor passerer C' gennem centrum for opdriften $\vec{F}_B$.

Tyngdekraften $\vec{F}_G$ går altid igennem massemidtpunktet *G* for båden.

De to kræfter $\vec{F}_G$ og $\vec{F}_B$ udøver imidlertid et kraftmoment $\vec{H} = \vec{\rho} \times \vec{F}_G$, og det fremgår af figuren, at $H = mgh\sin\theta$, og er rettet langs den positive y –akse.

Som det ses, vil kraftmomentet på båden altid have den retning at bringe båden tilbage til ligevægtsstillingen, og dermed udelukke at båden kæntrer.

Hvis opdriften imidlertid ligger til venstre for massemidtpunktet, vil kraftmomentet skifte retning og bringe båden til forlis.

Hvis en båd derfor har en form, som følger de almindelige regler for båd konstruktion, mere eller mindre som vist på de to tegninger ovenfor, så kan båden ikke kæntre ved krængninger, som er forårsaget af dønninger på havet.
Selv middelstore skibe kan imidlertid godt væltes af voldsomme bølger, der slår ind mod skibssiden.

For moderate krængninger, kan vi approksimere krængningsmomentet $H = mgh\sin\theta$ med $H = mgh\theta$
Hvis I angiver inertimomentet af båden omkring y-akse, kan vi anvende kraftmomentsætningen $I\ddot{\theta} = H$, som i dette tilfælde bliver

$$I_{båd}\ddot{\theta} = -m_{båd}g\theta$$

Men dette er blot differentialligningen for et fysisk pendul.

$$I\ddot{\theta} = -k\theta \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} = -\omega^2\theta \quad \text{hvor} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

I tilfældet med en båd som vipper er $k = m_{boat}g\theta$, så vi finder:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_{boat}g}{I_{boat}}} \quad \text{eller} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{boat}}{m_{boat}g}}$$

Bemærk at perioden T er uafhængig af amplituden, som det også er tilfældet for harmoniske svingninger.

At anvende numeriske værdier er ikke rigtig meningsfuld, men man kan lave nogle meget grove antagelser får at opnå en størrelsesorden af krængningen.
Hvis vi antager at båden er halvdelen af en cirkulær cylinder med radius r = 10 m og længden l = 100 m.
The moment of inertia of a circular disc is $\frac{1}{2}mr^2$ and the moment of inertia of half a cylinder with length l is therefore $\frac{1}{4}mr^2l$. The masses cancel in the expression for T, so we find:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{4}10^2 \cdot 100}{g}} \approx 50s$$

Efter min erfaring, er dette ikke så lang fra virkeligheden.

Reference: Arnold Sommerfeld: Mechanics of deformable bodies