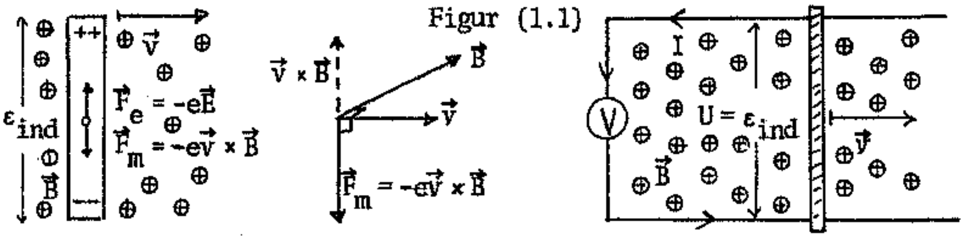
KAP. IV INDUKTION

1. INDUCERET ELEKTROMOTORISK KRAFT.

Elektricitet og magnetisme er - som vi har set - adskilte områder, når E- og B-felterne er konstante i tiden. Ligningerne (I.4.4-4.5) og (II.6.4-6.5) er uafhængige af hinanden for stationære elektriske og magnetiske felter. Helt anderledes stiller sagen sig for tidsafhængige elektriske og magnetiske felter. For tidsafhængige felter, må de omtalte ligninger revideres, og de bliver koblet sammen på en sådan måde, at begreberne elektricitet og magnetisme bliver to aspekter af samme fænomen - elektromagnetisme - . Lovene for elektromagnetisme leverer forklaringen på helt centrale fænomener i fysikken, som induktion og elektromagnetisk stråling (radiobølger - lys - røntgenstråling er altsammen elektromagnetisk stråling).

Vi vil starte med at redegøre for det fænomen, som kaldes induktion. Induktionsloven kan passende indledes med at betragte et retlinet lederstykke, der bevæges med hastigheden $\vec{v}$ i et homogent magnetfelt $\vec{B}$. Vi vil først antage, at $\vec{v}$ er vinkelret på såvel lederstykke som magnetfelt. Se figur (1.1)

Figur (1.1)



Under bevægelsen vil elektronerne i lederstykket være påvirket af en kraft fra B-feltet $\vec{F}_m = -e\,\vec{v} \times \vec{B}$ med størrelsen $F_m = e\,v\,B$, da $\vec{v} \perp \vec{B}$. På figur (1.1) vil denne kraft forskyde elektronerne nedad, således at der kommer et overskud af elektroner forneden (underskud foroven). Der vil følgelig opstå et elektrisk felt i lederstykket, og ladningsadskillelsen vil fortsætte, indtil den elektriske kraft på elektronerne $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ netop ophæver den magnetiske kraft $\vec{F}_m$.
Ud fra denne "ligevægtsbetingelse" kan man opstille en formel for den

spændingsforskel U, der fremkommer mellem lederstykkets endepunkter. Antager vi, at det elektriske felt E er konstant i lederstykket, er spændingsforskellen: $U = E d$, hvor d er lederstykkets længde.
I ligevægtstilstande gælder der:

$$(1.2) \qquad F_e = F_m \Leftrightarrow eE = evB \Leftrightarrow e\frac{U}{d} = evB \Leftrightarrow U = v \cdot B \cdot d$$

Forbindes lederstykkets endepunkter til et ydre kredsløb, vil den magnetiske kraftpåvirkning på elektronerne virke som en ladningspumpe, der trækker en strøm i kredsløbet. Et bevæget lederstykke i et magnetfelt virker derfor på samme måde som en elektromotorisk kraft ε . Da spændingsforskellen U er induceret (frembragt) af lederens bevægelse, har man tradition for at kalde U for en induceret elektromotorisk kraft. Betegnelsen for U er derfor traditionelt ε_{ind}. For den inducerede elektromotoriske kraft i et lederstykke, finder vi altså ifølge (1.2),

$$(1.3) \qquad \boxed{\varepsilon_{ind} = v \cdot B \cdot d}$$

Orienterer man en vektor $\vec{d}$ langs med lederstykket fra minus til plus, hvor $|\vec{d}| = d$, kan man bestemme et udtryk for ε_{ind} selv om vektorerne $\vec{d}$, $\vec{v}$ og $\vec{B}$ ikke er ortogonale. Det følger nemlig:

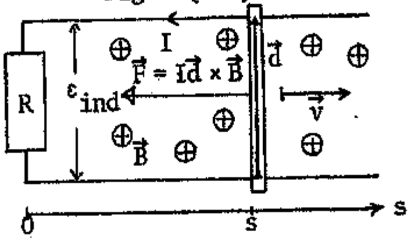
$$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B} \wedge \vec{F}_e = -e\vec{E} \wedge \vec{F}_m = -\vec{F}_e \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

$$(1.4) \qquad \varepsilon_{ind} = -\vec{d} \cdot \vec{E} \wedge \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{ind} = \vec{d} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}$$

Det bemærkes, at (1.3) følger af (1.4), når retningerne af vektorerne er valgt som på figur (1.1).
Forbindes lederstykkets endepunkter til et ydre kredsløb, vil der gå en strøm i kredsløbet. Er kredsløbets resistans R må der gælde, at $\varepsilon_{ind} = RI$. Når lederstykket gennemløbes af en strøm I, vil det imidlertid være påvirket af en Laplacekraft $\vec{F} = I\vec{d} \times \vec{B}$. Retningen af Laplace-kraften er vist på figur (1.5), og man ser, at denne i alle

tilfælde er rettet modsat lederstykkets bevægelse.

Figur (1.5)



På grundlag af energisætningen, må vi forvente en kraft, der er rettet mod lederstykkets bevægelse.
Vi vil nu vise, at udtrykket (1.3) for den inducerede emk. er en konsekvens af energisætningen. Vi udtrykker derfor, at det arbejde der udføres på lederstykket, er lig med den energi, der afsættes i kredsløbet.

$$\Delta A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s} \ \wedge \ \vec{F} = I\vec{d} \times \vec{B} \ \Rightarrow \ \Delta A = IBd\Delta s$$

$$\Delta E = UI\Delta t \ \wedge \ \varepsilon_{ind} = U \ \Rightarrow \ \Delta E = \varepsilon_{ind} I\Delta t$$

$$(1.6) \quad \Delta A = \Delta E \ \Rightarrow \ IBd\Delta s = \varepsilon_{ind} I\Delta t \ \Rightarrow \ \varepsilon_{ind} = \frac{\Delta s}{\Delta t}Bd = vBd$$

Man ser, at udtrykket (1.6) for den inducerede elektromotoriske kraft, udledt ud fra energisætningen, er identisk med (1.3). Sammenhængen mellem retningen af induktionsstrømmen og retningen af Laplacekraften, kan formuleres på følgende måde:

1.7 Sætning: Induktionsstrømmen I har altid en sådan retning, at den søger at modvirke årsagen til sin opståen.

Denne lidt gammeldags formulering af en konsekvens af energisætningen skyldes Lenz, og kaldes for Lenz lov.

2. INDUKTIONSLOVEN. FARADAYS LOV.

Vi vil nu bestemme et mere generelt udtryk for den inducerede elektromotoriske kraft i et lederstykke, som kan benyttes uafhængigt af antagelserne i § 1. Først ser vi igen på opstillingen, som vist på figur (1.5). Den magnetiske flux gennem den flade, der begrænses af induktionsstrømmens cirkulation er $\Phi_B = BA = Bsd$. s er strømkredsens længde, målt på en absisseakse som vist på figuren. Magnetisk flux måles normalt med fortegn, og vi vedtager, at regne fluxen for positiv, hvis den positive strømretning sammen med retningen af B-vektoren danner en højreskrue. På figur (1.5) er fluxen således negativ,

Kap IV

og vi skriver derfor: $\Phi_B = -Bsd$. Vi bemærker, at så længe lederstykket bevæges, vil fluxen Φ_B afhænge af tiden. Differentieres Φ_B med hensyn til tiden finder man:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\frac{ds}{dt}d = -Bvd = -\varepsilon_{ind} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}} \tag{2.1}$$

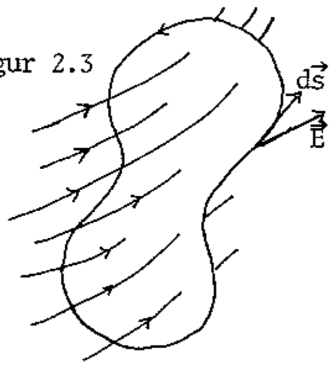
I (2.1) har vi anvendt udtrykket (1.3) for et lederstykke, der bevæger sig med konstant hastighed $\vec{v}$ i et homogent magnetfelt $\vec{B}$.
Med formuleringen (2.1) for den inducerede elektromotoriske kraft, er det nærliggende at antage, at der vil induceres en elektromotorisk kraft i et kredsløb, hvis fluxen gennem fladen, som begrænses af kredsløbet ændres, - uafhængigt af om ændringen sker, fordi lederstykket bevæges, eller fordi fluxen ændres på anden vis - . At dette faktisk er tilfældet bekræftes ved forsøg. Man skal bemærke, at generaliseringen ovenfor ikke er helt triviel. Ændres fluxen gennem en lukket leder ved at ændre på magnetfeltet, er elektronernes hastighed nul i forhold til leder og magnetfelt. Lorentz-kraften på en elektron i lederen $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ er således også lig med nul, og den inducerede emk's opståen kan ikke forklares som i §1.
Vi må derfor betragte sammenhængen mellem den inducerede emk. i et lukket kredsløb og fluxændringen gennem en flade, der begrænses af kredsløbet, som en naturlov. Den kaldes induktionsloven eller Faradays lov.

$$\boxed{\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(Induktionsloven)}} \tag{2.2}$$

Minustegnet i induktionslonen er en konsekvens af den indførte fortegnsregning, og kan forstås ud fra Lenz lov.
Tænker man sig f.eks. en positiv voksende flux, vil dette ifølge (2.2) give anledning til en negativ emk. Men dette er i overensstemmelse med Lenz lov, idet en negativ emk. skaber en negativ strømretning, der igen skaber en negativ (egen)flux.(Altså modsat rettet den flux Φ_B, som gav anledning til induktionsstrømmen).
På tilsvarende måde, kan man se overensstemmelsen med Lenz lov, når fluxen Φ_B er aftagende (og) eller negativ.

INDUKTION

Figur 2.3



Begrebet induceret elektromotorisk kraft i et lukket kredsløb, er at betragte som en ny naturlov, idet fænomenet ikke kan forklares ud fra hvad vi tidligere har lært.
Opfatter man den inducerede emk. ε_{ind} som en spændingsforskel, kan man f.eks. ikke angive to punkter mellem hvilke denne spændingsforskel kan måles.
Lad os antage at vi har en lukket leder, og hvor vi ændrer fluxen gennem den flade, som lederen begrænser, mens lederen selv er i hvile. Ifølge induktionsloven, vil der induceres en emk i lederen, og der vil gå en strøm I, som kan bestemmes af $\varepsilon_{ind} = RI$, hvor R betegner lederens resistans. Elektronerne i lederen må altså være påvirket af en kraft, som "skubber" dem rundt i kredsløbet. Lorentz-kraften $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ fortæller os, at kraften må skyldes tilstedeværelsen af et elektrisk felt $\vec{E}$, da lederen er i hvile og dermed $\vec{v} = \vec{0}$.
Det arbejde, som den elektriske kraft udfører på en elektron, når den føres ên gang rundt i kredsløbet, kan udregnes som $W_{-e} = \oint \vec{F}\cdot d\vec{s} \Leftrightarrow W_{-e} = -e\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$, hvor kurveintegralet udregnes langs med lederen.
Vi har tidligere defineret en <u>potentialforskel, som feltkraftens arbejde divideret med ladningen.</u> Vi finder derfor den inducerede emk, ved at dividere kurveintegralet med -e. Heraf får man:

$$\varepsilon_{ind} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} \qquad \text{eller} \qquad \boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}} \tag{2.4}$$

Det sidste af udtrykkene (2.4) er fremkommet ved at anvende induktionsloven. Denne sidste ligning er den mest generelle formulering af induktionsloven. På formen (2.4) er loven uafhængig af, om der er en leder til stede eller ej. Induktionsloven kan herefter formuleres:

<u>2.5 Sætning:</u> <u>Kurveintegralet af det elektriske felt langs en lukket kurve, er lig med minus $\frac{d}{dt}$(magnetisk flux) gennem en flade, som har den lukkede kurve som randkurve.</u>

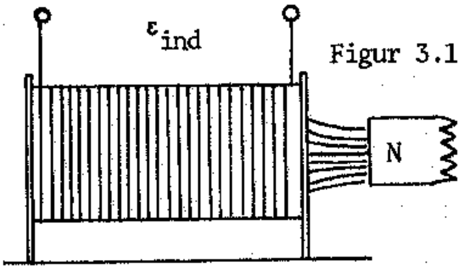
Kap IV

Vi bemærker især, at hvis magnetfeltet er konstant i tiden er differentialkvotienten nul, og integralet af det elektriske felt langs en vilkårlig lukket kurve er nul. Dette er en af grundligningerne i elektrostatikken. (Det elektriske felt er konservativt). I tilfælde af et tidsafhængigt magnetfelt er det elektriske felt ikke længere konservativt. De korrekte ligninger til beregning af det elektriske felt er dog i alle tilfælde:

(2.6) $$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ (Gauss lov)

(2.7) $$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$ (Induktionsloven)

3. EKSEMPLER PÅ ANVENDELSE AF INDUKTIONSLOVEN



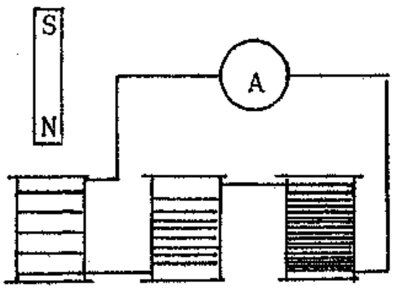
Figur 3.1

Føres en stangmagnet ind i en spole ændres fluxen gennem hver af vindingerne, og i hver af vindingerne vil der ifølge (2.2) induceres en elektromotorisk kraft.
Hvis spolen har N vindinger, vil der opstå en spændingsforskel mellem spolens endepunkter, der er N gange så stor som den inducerede emk. i hver af vindingerne.

(3.2) $$\varepsilon_{ind} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$ (Induceret emk i spole med N vindinger)

I spoler med mange vindinger, kan den inducerede spænding blive meget stor. (At der ikke kan dannes tilsvarende store strømme, følger af Lenz lov, idet en stor induktionsstrøm vil eliminere det magnetfelt, som skaber den).

3.3 Forsøg: Induktionsloven (3.2) for en spole kan kvalitativt eftervises med et simpelt forsøg. På figuren næste side har man serieforbundet 3 spoler med et amperemeter. Spolerne kan f.eks. have vindingstallene 250, 500 og 1000.
Føres en stangmagnet på samme måde ned i hver af spolerne, vil ud-



Figur 3.3

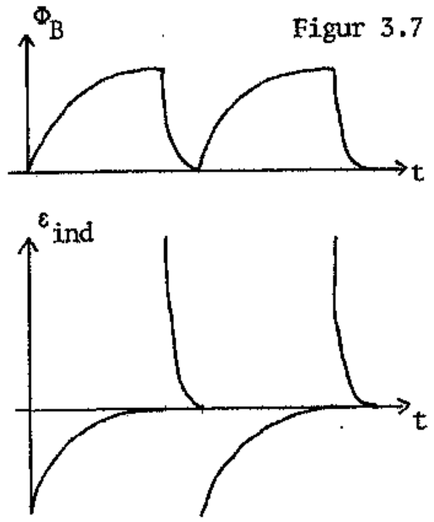
slaget på amperemeteret være proportional med den inducerede emk i spolen. Der gælder nemlig RI = ε_{ind}, hvor R er modstanden i serieforbindelsen. Ved forsøget kan man også se, at udslaget forøges jo hurtigere stangmagneten føres ind i spolen. Vendes stangmagneten, vendes også induktionsstrømmen, og dermed udslaget på amperemeteret

3.4 Eksempel.

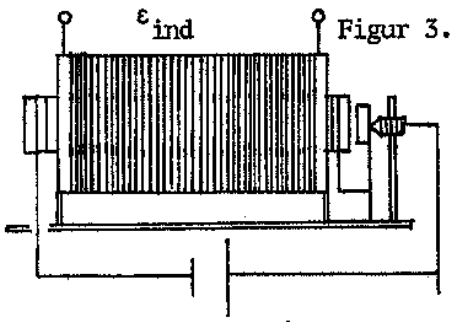
Fluxen gennem en stangmagnet er 0,68 mWb. Den føres ind i en spole med 1000 vindinger i løbet af 0,2 s. Beregn spændingsforskellen mellem spolens endepunkter.

Ifølge (3.2) $\varepsilon_{ind} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -1000\,\frac{0{,}68\ 10^{-3}\,\mathrm{Wb}}{0{,}2\ \mathrm{s}} = 3{,}4\ \mathrm{V}$

Et induktionsapparat er et snedigt eksempel på hvorledes man kan inducere høje spændinger ved hjælp af en moderat jævnspændingskilde, f.eks. et 4,5 V batteri.



Figur 3.7



Figur 3.6

Figur (3.6) viser den principielle indretning af induktionsapparatet. Inderst er primærspolen, som er forsynet med en jernkerne. Primærspolen har få vindinger i forhold til sekundærspolen, som er anbragt uden om primærspolen. Ændres den magnetiske flux gennem primærspolen, vil der være den samme fluxændring gennem sekundærspolen. Fluxen gennem primærspolen ændres meget hurtigt ved hjælp af en kontaktafbryder på en bladfjeder. Når primærstrømmen sluttes, vil der hurtigt opbygges et magnetfelt i spolen. Kontakten på bladfjederen tiltrækkes af jernkernen, og hermed bliver primærstrømmen afbrudt. Herved forsvinder fluxen gennem primærspolen. Bladfjederen slår tilbage, kredsløbet sluttes og magnetfeltet dannes på ny. I praksis vil bladfjederen stå og svinge med en frekvens fra 5 til 50 Hz. Da fluxændringen,- især når strømmen afbrydes -, sker meget hurtigt, vil differentialkvotienten $d\Phi_B/dt$ være meget stor. Den inducerede emk i sekundærspolen er proportional med $d\Phi_B/dt$ og med vindingstallet N. Med et induktionsapparat, kan man opnå sekundærspændinger ε_{ind} på flere tusinde volt, ved blot at anvende en primærspænding på få volt.

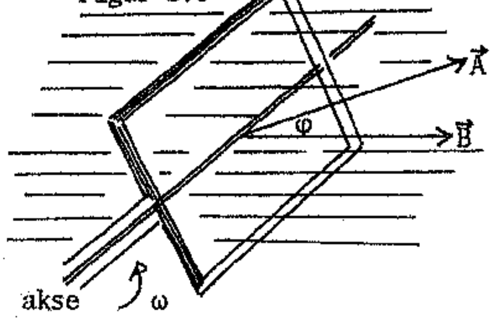
På figur (3.7) er fluxen gennem primærspolen afbildet sammen med den inducerede emk i sekundærspolen. Man bemærker, at kurverne er i overensstemmelse med relationen:

$$\varepsilon_{ind} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Induktionsapparatet anvendes, når man ønsker meget høje spændinger, men små strømstyrker. Effekten der udtages på sekundærspolen, kan naturligvis ikke overstige den effekt, der tilføres på primærspolen.

Den mest almindelige anvendelse af induktion, er vel i en <u>vekselstrømsgenerator</u>. En vekselstrømsgenerator er i princippet blot en flad spole, der roteres i et homogent magnetfelt. På figur (3.8) betegner $\vec{A}$ fladenormalsvektoren for den plane spole med N vindinger, og $\vec{B}$ er det homogene magnetfelt. φ er vinklen mellem $\vec{B}$ og $\vec{A}$. Roteres spolen nu med konstant vinkelhastig-

Figur 3.8



hed ω, er $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Fluxen Φ_B gennem spolen kan beregnes som

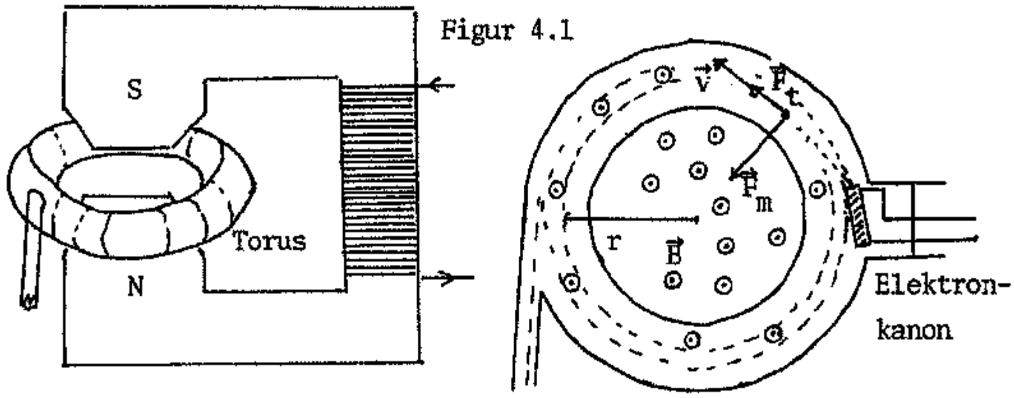
(3.9) $\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos\varphi = BA\cos(\omega t+\varphi_0)$

Den inducerede emk mellem spolenens endepunkter beregnes af induktionsloven.

(3.10) $\varepsilon_{ind} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow \varepsilon_{ind} = NBA\omega\sin(\omega t+\varphi_0) = u_m\sin(\omega t+\varphi_0)$

Mellem spolens endepunkter, vil der være en spændingsforskel, der varierer som en sinusfunktion med amplitude u_m = NBAω. En sådan spænding kaldes for en (sinusformet) vekselspænding. Forbindes endepunkterne til et kredsløb, vil der i kredsløbet gå en vekselstrøm. Vekselstrømmes opførsel vil blive behandlet mere udførligt i et senere afsnit.

4. PARTIKELACCELERATOR. BETATRONEN.



Figur 4.1

I en betatron accelererer man elektroner op til store hastigheder ved hjælp af et variabelt magnetfelt. Princippet i apparatet er skitseret ovenfor. En torus med højvacuum er anbragt mellem polskoene på et stor elektromagnet. Elektronerne skydes ind i torus´en fra en elektronkanon, hvor de f.eks. har gennemløbet en spændingsforskel på 50 kV, og derfor har en energi på 50 keV. Pointen er nu, at man forøger magnetfeltet mellem polskoene. Feltet vil da både have en styrende og en accelererende virkning på elektronerne.

Den styrende virkning kommer fra kraften $\vec{F}_m = -e\,\vec{v} \times \vec{B}$. Denne kraft

Kap IV

sørger for at holde elektronerne i en cirkelbevægelse med konstant radius r. Den accelererende virkning kommer fra det elektriske cirkulationsfelt, der dannes når fluxen ændres gennem torus´en. Ifølge induktionsloven er,

$$\varepsilon_{ind} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

For at beregne den elektriske kraft på elektronen, skal integralet beregnes langs med elektronens bane. Φ_B betegner da fluxen gennem den tilsvarende flade. For hvert omløb, får elektronen en tilvækst i kinetisk energi på $e\varepsilon_{ind}$.

Problemet ved betatronen er at variere magnetfeltet på en sådan måde, at det til stadighed holder elektronerne i en konstant cirkelbane. Betingelsen (4.5) for at dette er opfyldt er udledt nedenfor.

$$(4.2) \qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow 2\pi r E(r) = \frac{d}{dt}\int_0^r B(r)2\pi r dr = \frac{d}{dt}\left(\pi r^2 < B >\right)$$

Ved udregningen af fluxen, har vi benyttet, at arealet af en cirkulær ring med bredde dr kan skrives som $2\pi r dr$. $<B>$ betegner middelværdien af B-feltet over arealet πr^2. Af (4.2) finder man derfor ligningen

$$(4.3) \qquad E(r) = \tfrac{1}{2} r \frac{d<B>}{dt}$$

Ved at sætte den magnetiske kraft F_m lig med centripetalkraften F_c og tangentialkraften F_t lig med eE fås to ligninger:

$$(4.4) \qquad F_c = F_m \Leftrightarrow m\frac{v^2}{r} = evB(r) \Rightarrow mv = erB(r) \quad \text{og}$$

$$F_t = eE \Leftrightarrow \frac{d(mv)}{dt} = eE(r) \Rightarrow er\frac{dB(r)}{dt} = eE(r)$$

Sammenholdes (4.3) og resultatet af (4.4) finder man:

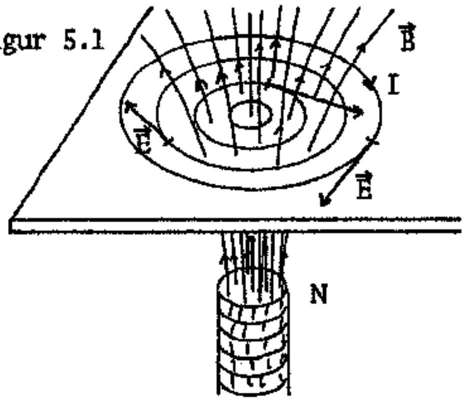
$$(4.5) \qquad E(r) = \tfrac{1}{2} r \frac{d<B>}{dt} \wedge E(r) = r\frac{dB(r)}{dt} \Rightarrow \tfrac{1}{2}\frac{d<B>}{dt} = \frac{dB(r)}{dt}$$

Den sidste ligning kan opfyldes, hvis $< B > = 2B(r)$, altså hvis middelværdien af B-feltet indenfor elektronens bane til stadighed er det dobbelte af B-feltet langs elektronens bane. B-feltet skal være inhomogent, og aftage med voksende radius.

5. HVIRVELSTRØMME.

Hvis den magnetiske flux gennem et ledende materiale ændres, vil der dannes induktionsstrømme i materialet. Disse strømme kaldes for hvirvelstrømme. Det elektriske felt, der induceres af fluxændringen og som skaber hvirvelstrømmene, kaldes derfor ofte for et hvirvelfelt.

Figur 5.1



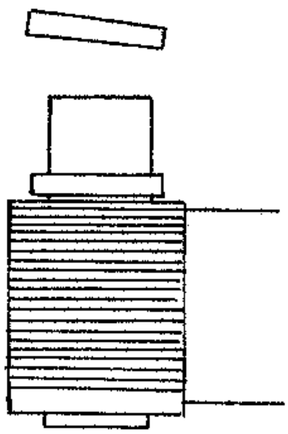
Ifølge induktionsloven gælder:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

På figuren er vist en variabel magnetisk flux gennem en metalplade. Hvirvelstrømmene i pladen vil følge de elektriske feltlinier. Hvirvelstrømme vil opvarme metallet, og der tappes på denne måde energi fra det magnetiske felt. Hvirvelstrømme er af denne grund ofte uønskede i elektromotorer og transformatorer, og andre elektriske apparater, der indeholder jernkerner. Fortegnet i induktionsloven hænger som omtalt sammen med Lenz' lov. For hvirvelstrømme betyder dette, at de har en sådan retning, at de søger at imødegå det magnetfelt, som skaber dem.

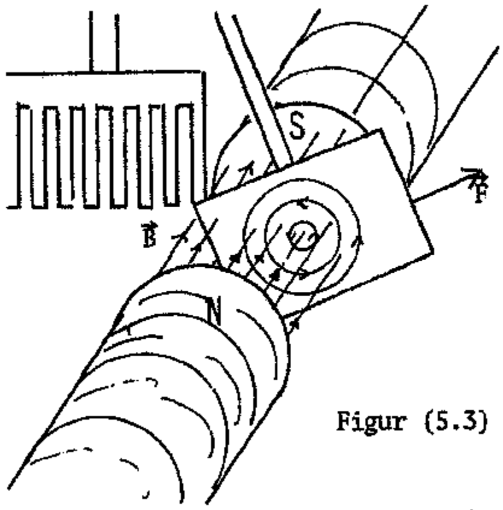
Forsøg 5.2: Hvirvelstrømme kan sammen med Lentz lov demonstreres på ret dramatisk vis ved at anbringe en aluminiumsring oven på jernkernen af en elektromagnet.

Figur 5.2



Sendes en jævnstrøm gennem spolen sker der intet, men en vekselstrøm vil få aluminiumsringen til at flyve af. Elektromagnetens magnetfelt vil nemlig variere i takt med vekselstrømmen og give anledning til en hvirvelstrøm i ringen, som er modsat rettet strømmen i spolen (Lenz lov). Da modsat rettede strømme frastøder hinanden flyver ringen af. (Saves ringen igennem sker der intet, da strømmen ikke kan passere).

Kap IV



Figur (5.3)

Hvirvelstrømme kan anvendes til at dæmpe mekaniske svingninger. Dette kan f.eks. illustreres med "Valkendorfs pendul". Pendulet består af en aluminiums-plade, der svinger ind mellem polskoene på en magnet. Da fluxen gennem pendulet ændres, induceres der hvirvelstrømme, og magnetfeltet fra disse vil have en sådan retning, at pendulet bremses, hvadenten det er på vej ind eller ud mellem polskoene. (Lenz lov). Giver man imidlertid pendulet en udformning, så det er opdelt i smalle strimler, hindrer man hvirvelstrømmene, og dæmpningen vil praktisk talt forsvinde. Dette er forklaringen på, at de jernkerner, der benyttes, når man ønsker at undgå hvirvelstrømme, altid er lavet af lamelleret metal, hvor lamellerne er isoleret fra hinanden.

5.4 Eksempel:

En aluminiumsring med tykkelse 1,0 mm, bredde 1,5 cm og radius 2,5 cm anbringes ovenpå en elektromagnet. Den magnetiske flux gennem ringen vokser fra 0 Wb til 20 mWb i løbet af 0,01 s. Den specifikke modstand for Al er $0{,}0265\,\Omega\,mm^2/m$. Beregn størrelsen af den hvirvelstrøm, der induceres.

Løsning: Den inducerede emk i ringen beregnes af: $\varepsilon_{ind} = \frac{d\Phi_B}{dt}$.

Heraf fås: $\varepsilon_{ind} = \frac{20\ mWb}{0{,}01\ s} = 2{,}0\ V$.

Ringens modstand beregnes af formlen: $R = \rho\frac{l}{A} = 0{,}0265\ \frac{2\pi 0{,}025}{1{,}0\ 15}\Omega$

Heraf fås $R = 2{,}78\ 10^{-4}\Omega$.

Strømstyrken kan herefter beregnes af Ohms lov: $I = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = \frac{2{,}0\ V}{2{,}78\ 10^{-4}\Omega}$

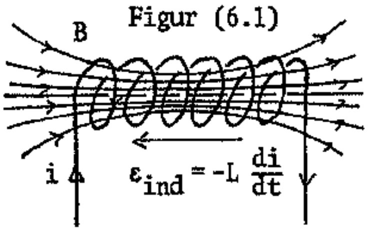
Dette giver strømstyrken $I = 3{,}60\ 10^{3}\ A$.

Eksemplet viser, at hvirvelstrømmene kan blive meget store. Beregningen ovenfor kan dog formodentlig ikke opretholdes, fordi hvirvelstrømmen selv giver anledning til et magnetfelt, der er rettet modsat det fra elektromagneten (Lenz lov), som vil svække fluxændringen gennem aluminiumsringen.

6. INDUKTANS. (SELVINDUKTION).

Ifølge induktionsloven vil der induceres en emk. i et kredsløb, hvis den magnetiske flux (gennem den flade som kredsløbet omslutter) ændres, og dette uafhængigt af, hvad der forårsager fluxændringen.
Sender man en strøm gennem en spole, vil der dannes et magnetfelt i spolen. Den B-flux, som strømmen selv skaber kaldes for egenfluxen

Figur (6.1)



Eksempel 6.1: Egenfluxen i en spole med længde l og tværsnitsareal A kan beregnes ud fra formlen kap. II (6.8b), idet $B = \mu_0\frac{N\cdot i}{l} \wedge \Phi_B = B\cdot A \Rightarrow \Phi_B = \mu_0\frac{N\cdot A}{l}i$
Ændres strømstyrken i gennem spolen, vil fluxen Φ_B også ændres, og ifølge Induktionsloven vil der induceres en emk. i hver af de N vindinger.

$$(6.2) \qquad \varepsilon_{ind} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0\frac{N^2A}{l}\frac{di}{dt} \Leftrightarrow \varepsilon_{ind} = -L\frac{di}{dt} \quad (\text{hvor } L = \mu_0\frac{N^2A}{l})$$

Vi har i ligningen ovenfor indført en ny konstant L, som kaldes for spolens induktans . Man bemærker især, at induktansen er proportional med kvadratet på vindingstallet.
Ovenfor har vi fundet et udtryk for induktansen i en solenoide, men for ethvert kredsløb gælder det, at strømmen i kredsløbet skaber en flux, og at denne flux ændres i takt med strømmen. Ændres fluxen, vil der induceres en emk i kredsløbet, som er proportional med differentialkvotienten af strømmen. I alle tilfælde skrives proportionalitetskonstanten som - L, hvor L kaldes for kredsløbets induktans. L er altid et positivt tal, minustegnet skyldes Lenz lov.

$$(6.3) \qquad \boxed{\varepsilon_{ind} = -L\frac{di}{dt}} \qquad \text{(Definition af induktans)}$$

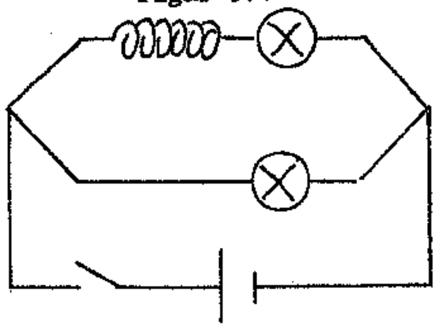
Enheden for induktans fremgår af (6.3), den er $\frac{Vs}{A} = \frac{Wb}{A}$. Enheden Weber pr. ampere kaldes for Henry, som forkortes H eller Hy. Man ser ofte enheden for μ_0 angivet i H/m .
Induktansen L kaldes også for selvinduktionskoefficienten. Det fænomen, at en ændring af strømmen i et kredsløb inducerer en emk i

Kap IV

kredsløbet, betegnes selvinduktion.
Induktansen afhænger kun af kredsløbets geometri. Forsynes en spole med jernkerne, vil induktansen være proportional med den relative permeabilitet.

Selvinduktion kan demonstreres med nogle enkle forsøg.

Figur 6.4



På figuren er vist et kredsløb, hvor der i hver af forgreningerne er anbragt en elektrisk pære.

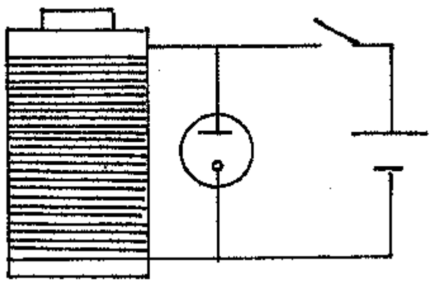
Den ene pære er serieforbundet med en spole med jernkerne, og som har forsvindende resistans.

Når kredsløbet sluttes, vil de to pærere efter et øjeblik lyse omtrent lige kraftigt, men man bemærker, at pæren i serie med spolen vil lyse med nogen forsinkelse.

Forklaringen på dette må søges i, at der i spolen induceres en modelektromotorisk kraft, som hindrer strømmens opvoksen. Strømmen gennem spolen vil derfor nå sin maximalværdi lidt senere.

En spole vil virke som en "modstand" mod strømændringer. Sender man således vekselstrøm gennem kredsløbet, vil pæren i serie med spolen overhovedet ikke lyse. En spole virker som en "modstand" i et vekselstrømskredsløb. Dette vil vi vende tilbage til under afsnittet om vekselstrøm.

Figur 6.5

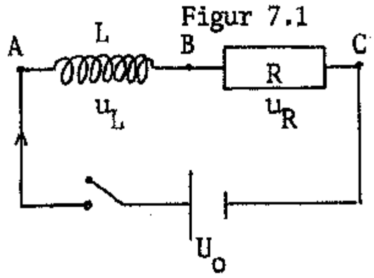


På figuren er vist et kredsløb, bestående af en jævnspændingskilde på nogle få volt i serie med en spole med mange, f.eks. 1000 vindinger. For at forøge spolens induktans, er den forsynet med en jernkerne. Parallelt med spolen er anbragt en glimlampe, som først tænder ved en spænding på ca. 100 V.

Man iagttager, at glimlampen lyser op i det øjeblik, at kredsløbet afbrydes. Forklaringen på dette skal søges i (6.3), idet strømmen øjeblikkelig falder til nul, når kredsløbet afbrydes. $\frac{di}{dt}$ er derfor meget stor, og spændingsforskellen mellem spolens endepunkter kan derfor blive mange gange større end primærspændingen, idet kredsløbet afbrydes.

7. R - L KREDSLØB.

Figur 7.1



Vi skal se på et kredsløb, bestående af en jævnspændingskilde i serie med en spole med induktans L, og en resistor med resistansen R. Jævnspændingskilden har den konstante spænding U_o. Spændingen over spole og resistor betegnes henholdsvis u_L og u_R. Med figurens betegnelser finder man:

$$(7.2) \qquad V_A - V_C = u_L + u_R = -\varepsilon_{ind} + Ri \Rightarrow \boxed{U_o = L\frac{di}{dt} + Ri}$$

Den sidste differentialligning kan løses til at bestemme, hvorledes strømmen vokser op, når kredsløbet sluttes. Begyndelsesbetingelsen er derfor: $i(0) = 0$. Man bemærker, at $U_o = Ri$, når strømmen er blevet stationær, d.v.s. når $\frac{di}{dt} = 0$.

Differentialligningen (7.2) er formelt identisk med en tilsvarende ligning vi løste ved opladning af en kapacitor. Ligningen separeres, og integreres til at give løsningen, som angivet nedenfor.

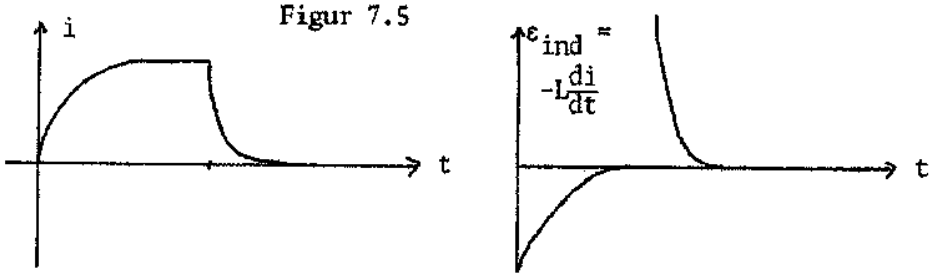
$$(7.3) \qquad \frac{L\,di}{U_o - Ri} = dt \wedge i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{U_o}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Strømmen vil altså nærme sig asymptotisk til sin slutværdi. Størrelsen $T = \frac{L}{R}$ har enhed af sekund. T kaldes for kredsløbets tidskonstant. Kortslutter man kredsløbet, således at $V_A = V_C$, finder man:

$$(7.4) \qquad 0 = u_L + u_R \Rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \Rightarrow \quad i(t) = i_o e^{-\frac{R}{L}t}$$

Strømmen vil altså aftage eksponentielt mod nul med samme tidskonstant, som under opladningen. Nedenfor er skitseret den sammenhørende variation af strømstyrken i og ε_{ind} ved op- og afladning.

Figur 7.5



8. MAGNETISK FELTENERGI.

Ligningen (7.2) kan omdannes til en energiligning ved at multiplicere den med $i\cdot dt$, hvor i er strømstyrken i tidsrummet dt. Heraf fås:

$$(8.1) \qquad U_0 = L\frac{di}{dt} + Ri \quad \Rightarrow \quad U_0 i\,dt = L\frac{di}{dt}i\,dt + Ri^2dt$$

Den sidste ligning udtrykker at den energi, som spændingskilden afgiver i tidsrummet dt, er lig med den energi som afsættes i modstanden R (Joules lov), plus et led: $L\frac{di}{dt}i\,dt$, der må fortolkes som den energi, som oplagres i spolens magnetfelt.

Energiomsætningen fra 0 til t_0 findes ved at integrere (8.1).

$$(8.2) \qquad \int_0^{t_0} U_0 i\,dt = \int_0^{t_0} Li\frac{di}{dt}dt + \int_0^{t_0} Ri^2dt$$

Ved at integrere med hensyn til i istedet for t, idet $i_0 = i(t_0)$, fås:

$$(8.3) \qquad E_{mag} = \int_0^{t_0} Li\frac{di}{dt}dt = \int_0^{i_0} Li\,di \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{mag} = \tfrac{1}{2}Li_0^2}$$

Det kræver åbenbart energi at opbygge et magnetisk felt i en spole, og E_{mag} betegnes som magnetisk feltenergi.

Situationen er til en vis grad analog til opbygningen af et elektrisk felt i en kapacitor, hvor vi fandt udtrykket: $E_{el} = \frac{1}{2}Cu_0^2$.

Den magnetiske feltenegi kan eksperimentelt påvises ved at fjerne spændingskilden og samtidig kortslutte kredsløbet på figur (7.1).

Spolen vil da ifølge (7.4) opretholde en elektrisk strøm, mens den magnetiske feltenergi omdannes til varme i resistoren.

8.4 Eksempel:

En spole har 1000 vindinger, og en resistans på 10Ω. Spolens længde er 10 cm og den er forsynet med en kvadratisk jernkerne på 2 x 2 cm². Jernets relative permeabilitet er 12. Spolen forbindes til et kredsløb med en jævnspændingskilde på 25 V.

a) Beregn spolens induktans.

b) Bestem kredsløbets tidskonstant, strømmens slutværdi, samt den feltenergi, der er oplagret i spolen ved strømmens slutværdi.

c) Beregn spændingen over spolen, når strømstyrken er 1,0 A.

Løsning:

Spolens induktans beregnes af (IV.6.2), idet μ_o skal erstattes af $\mu = \mu_r\mu_o$.

$$L = \mu_r\mu_o \frac{N^2 A}{l} = 12 \cdot 4\pi 10^{-7} \frac{10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{0,1} H = 6,03\ 10^{-2} H = 60,3\ mH$$

Kredsløbets tidskonstant er $T = \frac{L}{R} \Rightarrow T = \frac{60,3\ mH}{10\Omega} = 6,03\ ms$

Strømmens slutværdi er $i_o = \frac{U_o}{R}$: $i_o = \frac{25\ V}{10\Omega} = 2,5\ A$

Feltenergien beregnes af (8.3): $E = \frac{1}{2}Li_o^2 = \frac{1}{2}\ 60\ mH\ 6,25\ A^2 = 0,188\ J$

Af ligningerne: $u_L = -\varepsilon_{ind} = L\frac{di}{dt}$ *og* $U_o = L\frac{di}{dt} + Ri$ *finder man:*

$$u_L = U_o - Ri = 25\ V - 10\Omega \cdot 1,0\ A = 15\ V$$

8.5 Opgaver:

1) En spole med resistansen 20Ω tilsluttes en jævnspænding på 100 V. I det øjeblik strømmen er 3,0 A, ændres den med 80 A/s. Beregn spolens induktans.

2) En spole med induktansen 50 mH og resistansen 10Ω serieforbindes med en resistor på 125Ω og en jævnspændingskilde på 100 V. Beregn hvor lang tid, der går før strømmen når halvdelen af sin slutværdi.

3) En spole med induktansen 0,20 H og resistansen 2,5 Ω tilsluttes en konstant spændingskilde på 10 V. Beregn hvor meget strømstyrken ændres pr tidsenhed i det øjeblik, at strømstyrken er 1,0 A.