Impulsbevarelse ved stød

Indhold

Ole Witt-Hansen 1977 (2016)

1. Centralt stød

Vi skal i det følgende beskæftige os med de lovmæssigheder der gælder, når to legemer støder sammen i et centralt stød. Centralt, betyder at legemerne før og efter stødet bevæger sig langs samme rette linie. Nedenfor er skitseret de tre faser af et centralt stød.

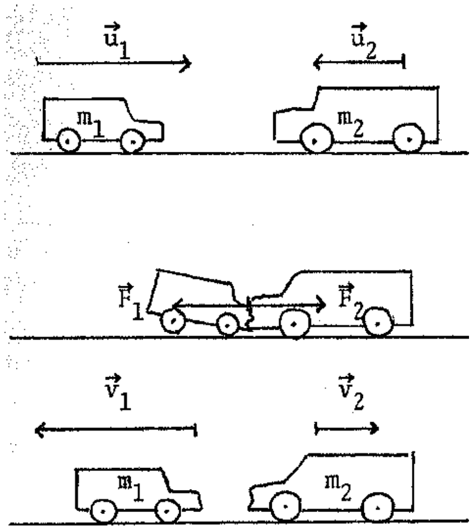

Fig. 1.1

To legemer med masserne m_1 og m_2 bevæger sig hen imod hinanden med hastighederne $\vec{u}_1$ *og* $\vec{u}_2$.

Stødet: De to legemer påvirker hinanden med kræfter $\vec{F}_1$ *og* $\vec{F}_2$. Herved deformerer de to legemer hinanden.

De to legemer fjerner sig nu fra hinanden med hastighederne $\vec{v}_1$ *og* $\vec{v}_2$. Eventuelt kan de to legemer være trykket sammen til et legeme, der bevæger sig med deres fælles hastighed $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

Bemærk, at alle variable for 1. legeme har indeks (1), og tilsvarende for legeme 2.
Bemærk endvidere at alle hastigheder før stødet betegnes med bogstavet *u*, men hastighederne efter stødet betegnes med bogstavet *v*. (Vigtigt for overblikket)

Vi antager, at der ikke forekommer gnidningskræfter med underlaget, således at de eneste kræfter, der påvirker de to legemer, er de kræfter, hvormed de påvirker hinanden. Vi betragter nu to principielt forskellige situationer.

2. Elastisk stød

De to legemer vil under stødet deformere hinanden, og deres kinetiske energi vil under stødet være delvis omdannet til potentiel energi, men på grund af elasticiteten vil den potentielle energi igen blive omdannet til kinetisk energi.

Et elastisk stød er derfor defineret ved at den kinetiske energi er bevaret.

Et elastisk stød kan f.eks. (med god tilnærmelse) realiseres, når to billard kugler støder sammen.

3. Uelastisk stød

Et fuldstændig uelastisk stød er karakteriseret ved, at de to legemer arbejder sig (uelastisk) ind i hinanden, og efter stødet fortsætter som et legeme, med deres fælles hastighed.
Et fuldstændig uelastisk stød, kan f.eks. realiseres ved at skyde et projektil ind i en træklods, hvor det bliver siddende.

De fleste stød vil nok være en mellemting mellem de to tilfælde, hvor legemerne nok er adskilt efter stødet, men hvor der er et tab i kinetisk energi på grund af friktion.

Når den kinetiske energi ikke er bevaret kaldes stødet for uelastisk.
På trods af forskelligheden i de tre typer af stød, vil vi alligevel vise, at der gælder en og samme lovmæssighed for dem alle. Dette kaldes for impulsbevarelse (bevægelsesmængdebevarelse).

4. Impulsbevarelse ved stød

Vi betragter derfor et centralt stød, der kan være enhver af de tre typer.
Vi antager at stødet varer tidsrummet Δt. I dette tidsrum antages at legemerne påvirker hinanden med kræfterne: $\vec{F}_1 \;\; og \;\; \vec{F}_2$.
Ifølge Newtons 3. lov er $\vec{F}_1 \;\; og \;\; \vec{F}_2$ til ethvert tidspunkt lige store og modsat rettede:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Under stødet får legeme (1) en hastighedstilvækst: $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_1 - \vec{u}_1$ og legeme (2) får en hastighedstilvækst: $\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_2 - \vec{u}_2$. De to legemers (gennemsnitlige) acceleration under stødet, kan da bestemmes ved at dividere hastighedstilvæksten med Δt.

Vi opskriver derfor Newtons 2. lov for de to legemer under stødet:

(1.2) $$\vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1 = m_1\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} \qquad \wedge \qquad \vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2 = m_2\frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}$$

Ved anvendelse af Newtons 3. lov:

(1.3) $$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} = -m_2\frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = -m_2(\vec{v}_2 - \vec{u}_2)$$

Ordnes leddene i den sidste ligning, så hastighederne efter stødet står på venstre side og hastighederne før stødet, står på højre side, får man:

(1.4) $$\boxed{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}$$

Man definerer et legemes impuls (bevægelsesmængde) som produktet af et legemes masse og dets hastighed. Impuls betegnes med bogstavet p. Impulsen er lige som hastigheden en vektor.

(1.5) $$\vec{p} = m\vec{v}$$

Af (1.4)ses, at summen af de to legemers impuls efter stødet er lig med summen af de to legemers impuls før stødet. Dette kaldes for

(1.6) Impulsbevarelse ved vekselvirkning (stød) mellem to legemer

Bemærk, at da vi regner med vektorer, har vi intet antaget om, at stødet var elastisk eller centralt. Impulsbevarelsen gælder uindskrænket, også i de tilfælde, hvor den mekaniske energi ikke er bevaret.
Næst efter energibevarelse er impulsbevarelse nok den vigtigste lovmæssighed i fysikken.

Af definitionsligningen (1.5) ses, at impuls har SI-enheden *kg m/s.*

Vil vi nu betragte det central elastiske og det fuldstændig uelastiske stød i detaljer.

5. Centralt elastisk stød

Kun for at lette regningerne, gennemfører vi eksemplet med den antagelse at legeme (2) er i hvile før stødet, så $u_2 = 0$. Resultaterne for det generelle tilfælde er anført bagefter.
Vi dropper endvidere vektorsymbolerne, idet der er tale om retlinede bevægelser, mens hastighederne fortsat skal regnes med fortegn.

For det elastiske stød gælder både impulsbevarelse og bevarelse af den kinetiske energi.

(1.6) $I: \quad m_1 u_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2$ (Impulsbevarelse, hvor $u_2 = 0$)

$II: \quad \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ (Bevarelse af den kinetiske energi)

Af disse (to ligninger med to ubekendte), kan man beregne hastighederne v_1 og v_2 efter stødet. Da det ikke er lineære ligninger, gøres det ved følgende omskrivninger, (som er vist men ikke forklaret i detaljer):

(1.7)
$$\begin{array}{l} I: \quad m_1(u_1 - v_1) = +m_2 v_2 \\ II: \quad \frac{1}{2} m_1(u_1^2 - v_1^2) = +\frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} I: \quad m_1(u_1 - v_1) = +m_2 v_2 \\ II: \quad m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) = m_2 v_2^2 \end{array}$$

I det sidste udtryk divideres da *I* op i *II.* (*I* skal dog beholdes, hvis vi skal regne ensbetydende)

$$\begin{array}{l} I: \quad m_1(u_1 - v_1) = m_2 v_2 \\ II: \quad (u_1 + v_1) = v_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} I: \quad m_1(u_1 - v_1) = m_2 v_2 \\ II: \quad u_1 + v_1 = v_2 \ \vee \ v_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} I: \quad u_1 - v_1 = 0 \\ II: \quad v_2 = 0 \end{array} \vee \begin{array}{l} I: \quad m_1(u_1 - v_1) = m_2(u_1 + v_1) \\ II: \quad v_2 = u_1 + v_1 \end{array}$$

De sidste to ligninger er to lineære ligninger med to ubekendte, og de løses på sædvanlig vis.

(1.8) $$\boxed{v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \ \wedge \ v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \quad \vee \quad v_2 = 0 \ \wedge \ v_1 = u_1}$$

Af udtrykkene (1.8) ses, at hastighederne efter stødet v_1 og v_2 kan beregnes, når hastigheden før stødet u_1 samt masserne m_1 og m_2 er kendte.

Løsningen med $v_2 = 0$, har ingen fysisk interesse, da det betyder at legemerne ikke støder sammen, men fortsætter med deres respektive hastigheder. (Men det *er* en løsning til ligningerne).

Af udtrykkene fremgår, at v_2 altid er ensrettet med u_1, mens v_1 er ensrettet med u_1, hvis $m_1 > m_2$ (medløb) og modsat rettet u_1, hvis $m_1 < m_2$ (refleksion).

Hvis $m_1 = m_2$, ser man, at $v_2 = u_1$ og at $v_1 = 0$. De to legemer bytter hastigheder, et fænomen, der er velkendt fra billard spil.

Hvis vi nu antager at m_2 er "uendelig stor" i forhold til m_1 (en bold rammer et gulv), så kender vi resultatet, som også kan vises ud fra ligningerne (1.7), ved at dividere med m_2 i tæller og nævner, og anvende at forholdet $m_1 : m_2$ er nul.

$$v_1 = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} u_1 = -u_1 \quad \wedge \quad v_2 = \frac{2\frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} u_1 = 0$$

Gulvet bliver liggende, og bolden springer tilbage med den samme hastighed. Vi har taget dette med, fordi vi skal anvende resultatet i den kinetiske molekylteori, hvor molekyler støder mod væggen af en beholder.

<u>Det generelle tilfælde</u>, hvor begge legemer er i bevægelse før stødet, kan løses efter den samme metode, ved anvendelse af lidt matematisk snilde. Resultatet er:

$$I: \quad m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad \text{(Impulsbevarelse, hvor } u_2 <> 0\text{)}$$

$$II: \quad \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad \text{(Bevarelse af den kinetiske energi)}$$

$$\begin{aligned} I&: \quad m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \\ II&: \quad m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I&: \quad m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \\ II&: \quad m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) = m_2(v_2 - u_2)(v_2 + u_2) \end{aligned}$$

Ved at dividere *II* med *I*:

$$\begin{aligned} I&: \quad m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \\ II&: \quad u_1 + v_1 = v_2 + u_2 \end{aligned}$$

$$I: \ m_2v_2 + m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2$$
$$II: \ v_2 - v_1 = u_1 - u_2$$

$$I: \ m_2v_2 + m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2$$
$$II: \ m_1v_2 - m_1v_1 = m_1u_1 - m_1u_2$$

$$(m_1 + m_2)v_2 = 2m_1u_1 + (m_2 - m_1)u_2 = 2(m_1u_1 + m_2u_2) - (m_1 + m_2)u_2$$

Her af følger udtrykket for v_2. Udtrykket for v_1 findes på helt tilsvarende måde.

(1.8) $$v_1 = \frac{2(m_1u_1 + m_2u_2)}{m_1 + m_2} - u_1 \quad \wedge \quad v_2 = \frac{2(m_1u_1 + m_2u_2)}{m_1 + m_2} - u_2$$

Indsættes $u_2 = 0$, ses efter en mindre reduktion, at man genfinder resultatet (1.7)

6. Centralt fuldstændig uelastisk stød

Ved det fuldstændig uelastiske stød er den kinetiske energi ikke bevaret ved stødet, men den fælles hastighed $v_1 = v_2 = v$ efter stødet kan beregnes ud fra impulssætningen. Vi antager først, at $u_2 = 0$.

(1.9) $$m_1u_1 = m_1v + m_2v \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{m_1u_1}{m_1 + m_2}$$

Vi udregner dernæst tilvæksten i kinetisk energi.

$$\Delta E_{kin} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - \tfrac{1}{2}m_1u_1^{\ 2} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1u_1}{m_1 + m_2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}m_1u_1^{\ 2}$$

(1.10) $$\Delta E_{kin} = -\tfrac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}u_1^{\ 2}$$

Som det fremgår af (1.10), så er tilvæksten i kinetisk energi altid negativ. Der sker altid et tab i kinetisk energi ved et uelastisk stød.

Det generelle tilfælde, hvor begge legemer er i bevægelse før stødet, kan udregnes på lignende vis:

(1.11) $$I: \ m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v + m_2v \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta E_{kin} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - \tfrac{1}{2}m_1u_1^{\ 2} - \tfrac{1}{2}m_2u_2^{\ 2} =$$

(1.12) $$\Delta E_{kin} = -\tfrac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(u_1^{\ 2} - u_2^{\ 2})$$

7. Eksempler og opgaver

1.13 Eksempel. Hastigheden af et projektil
Et projektil fra et gevær med massen $m_p = 20\ g$, skydes ind i en træklods med massen $m_k = 3{,}0\ kg$, hvor den bliver siddende. Klodsen er anbragt på et bord, og bliver som følge af "stødet" flyttet en strækning $s = 5{,}0\ m$, hvorefter den bliver bragt til standsning, som følge af friktionen med underlaget. Gnidningskoefficienten mellem bord og klods er målt til: μ = 0,20.

a) beregn klodsens hastighed *v* lige efter, at projektilet har ramt.
b) Beregn projektilets hastighed.
c)Beregn tabet i kinetisk energi og angiv tabet i procent.
d)Hvorledes omsættes den kinetiske energi.

Løsning:
a) Vi anvender arbejdssætningen: Den resulterende krafts (gnidningskraftens) arbejde er lig med tilvæksten i kinetisk energi.

$$-F_{gnidning}s = 0 - \tfrac{1}{2}(m_p + m_k)v^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2F_{gnidning}s}{m_p + m_k}}$$

Indsættes heri $F_{gnidning}=\mu(m_p+m_k)g$, finder man med indsatte talværdier.

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}20\cdot 3{,}02\ kg\cdot 9{,}82\ m/s^2\cdot 5{,}0\ m}{3{,}02\ kg}} = 4{,}43\ m/s$$

b) Vi anvender impulssætningen for fuldstændig uelastisk stød

$$m_p u = (m_p + m_k)v \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{m_p + m_k}{m_p}v$$

Indsættes den fundne værdi for *v*, finder man: u = 669 m/s.

c) Vi anvender $\Delta E_{kin} = -\tfrac{1}{2}\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}u_1^{\,2}$ $\qquad \Delta E_{kin} = -\tfrac{1}{2}\dfrac{0{,}02\ kg\ 3{,}0\ kg}{3{,}02\ kg}(669\ m/s)^2 = -4{,}45\ 10^3\ J$

d) $\dfrac{|\Delta E_{kin}|}{½ m_p u^2} = \dfrac{4{,}45}{4{,}48}100\% = 99{,}3\%$ Dette tab i kinetisk energi omsættes til varme i klodsen

1.14 Opgaver
1. En lastbil, som vejer 6 ton, støder frontalt sammen med en personvogn, der vejer 700 kg. Lastbilens hastighed før sammenstødet er 60 *km/*h og personbilens hastighed før sammenstødet er -80 *km/h*.
Sammenstødet antages at være centralt og fuldstændig uelastisk.
a) Beregn de to vognes fælles hastighed lige efter stødet, og beregn hastighedstilvæksten for begge køretøjer.

b) Idet man antager at sammenstødet varer 0,5 sek, skal man udregne, hvor store accelerationer føreren i lastbilen og personbilen er udsat for under sammenstødet.

c) Under den antagelse, at de begge vejer 80 *kg* og at de begge sidder i sele, skal man beregne den kraft, som selen påvirkes med.

d) Omregnet til tyngdekraft, hvor stor en masse vil det svare til i de to tilfælde.