Hydrodynamik er kompliceret matematik

Indhold

Ole Witt-Hansen 26/12-2013

1. Vektor analyse

Inden for den klassiske (ikke kvantemekaniske) fysik er hydrodynamikken, et af de områder der matematisk set hører til de mere komplicerede, men den er sammen med elektrodynamikken de mest imponerede anvendelser i fysikken af vektor analysen.
Den teoretiske hydrodynamik er fra et formelt synspunkt meget enkel (og smuk, hvis man har den slags tilbøjeligheder), men de fleste partielle differentialligninger, der er et resultat af teorien, er ikke lineære og kan i almindelighed ikke løses, bortset fra tilfælde med høj grad af symmetri.
Hydrodynamikken er en smuk afrundet teori, der desværre kun i beskedent omfang kan anvendes direkte på virkeligheden. Hvad teorien f.eks. ikke kan forklare er dannelsen af turbulens.

For at kunne beskæftige sig med hydrodynamik er det nødvendigt at kende til dele af den matematiske formalisme for vektoranalysen.

Et skalarfelt φ er er en funktion af sted og tid. $\varphi = \varphi(x,y,z,t)$.

Et vektorfelt består af 3 rumlige komponenter: $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$, som hver er en funktion af sted og tid.

Vektoranalysen anvender følgende matematisk symboler:

Gradient af et skalarfelt φ: $\vec{\nabla}\phi = (\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z})$ Skrives også *grad φ*

Divergens af et vektorfelt $\boldsymbol{v}$: $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ Skrives også *div* $\boldsymbol{v}$

Laplace operatoren: $\nabla^2\varphi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ Skrives også $\Delta\,\varphi$

Rotation af et vektorfelt: $\vec{\nabla}\times\vec{v} = (\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})$ Skrives også rot $\boldsymbol{v}$

For et vilkårligt vektor felt $\boldsymbol{v}$ gælder at:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = 0 \qquad \text{og} \qquad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = \vec{0}$$

Hvilket ”relativt nemt” kan vises, ved at skrive det op i koordinater.

Vi nøjes med at vise den første:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})$$

Leddene: $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v_z}{\partial y}$ $og -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v_z}{\partial x}$ vil gå ud mod hinanden, og tilsvarende for de øvrige to par.

2. Kontinuitetsligningen

Udtrykker, at den mængde væske, der pr. tidsenhed strømmer ud af en lukket flade er lig med den tidslige ændringen af væskemængden indenfor fladen. Hvis væsken er inkompressibel (usammentrykkelig), skyldes ændringen i væskemængden kilder og afløb inden for fladen.

$\vec{v}$ betegner hastighedsvektoren af et partikelelement i en væske med massefylde ρ.

Fladeelementet $d\vec{A}$ er en vektor, som er normal til fladen i punktet med den (infinitesimale) størrelse *dA*.

$\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}$ er fluxen, altså i dette tilfælde den væskemængde, der pr tidsenhed strømmer gennem fladeelementet $d\vec{A}$. Kontinuitetsligningen kan derfor skrives.

$$\int_{flade}\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{volumen}\rho dV$$

3. Stokes sætninger og Gauss lov

Stokes sætninger gælder (under nogle generelle betingelser) for et vilkårligt vektorfelt, men i hydrodynamikken formulerer vi dem ved hjælp af vektorfeltet $\rho\vec{v}$ bestående af hastighedsvektoren $\vec{v}$ i en væske med massefylde ρ.

Stokes 1. sætning:

Fluxen af et vektorfelt gennem en lukket flade er lig med integralet af vektorfeltets divergens over rumfanget af fladen.

$$\int_{flade\ A}\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}=\int_{volumen\ V}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})dV$$

Det første integral er ifølge kontinuitetssætningen lig med $\frac{\partial}{\partial t}\int_{volumen}\rho dV$ Og vi finder derfor:

$$\int\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})dV=\frac{\partial}{\partial t}\int_{volumen}\rho dV$$

Skal denne ligning være rigtig for alle rumfang, må der gælde:

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})=\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Som i dette tilfælde udtrykker kontinuitetsligningen på differentiel form.

Hvis ρ er overalt den samme: $\rho(x,y,z,t)=\rho$ reduceres ligningen til $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$, som udtrykker at væsken er usammentrykkelig.

Stokes 2. sætning:
Kurveintegralet af et vektor felt langs en lukket kurve er lig med flade integralet af vektorfeltets rotation langs en vilkårlig flade, som har kurven som randkurve.

$$\oint_{lukket\ kurve}\vec{v}\cdot d\vec{s}=\int_{flade}\vec{\nabla}\times\vec{v}\cdot d\vec{A}$$

Det er ikke helt ukompliceret at føre bevis for Stokes sætninger. Et ”fysisk” bevis kan f.eks. findes i Feynman Lectures II fra 1963.

Stokes love i elektrodynamikken
Stokes love er nok bedst kendte for deres anvendelse i elktrodynamikken. Maxwells ligninger er i SI-enheder.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$c^2\,\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Hvis vi har en flade, betegner $d\vec{A}$ fladenormalsvektoren, som er en udadrettet normal til fladen vektor med længden (infinitesimale areal) dA.

$\vec{E}\cdot d\vec{A}$ kaldes vektorfeltets flux (den elektriske flux) gennem fladeelementet $d\vec{A}$.

Vi udregner nu den samlede elektriske flux gennem en lukket flade, og anvender Stokes 1. lov

$$\int_{lukket\ flade\ A}\vec{E}\cdot d\vec{A}=\int_{volumen\,V}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV=\int_{volumen\,V}\frac{\rho}{\varepsilon_0}dV=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Dette er Gauss lov, (Maxwells 1. ligning på integralform) som udtrykker, at den elektriske flux gennem en vilkårlig lukket flade er lig med den samlede ladning indenfor fladen, divideret med ε_0.

På tilsvarende måde kan man anvende Stokes 2. sætning til at udlede Amperes lov ud fra Maxwells ligninger.

$$\oint_{lukket\ kurve} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{flade} \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int_{flade} \vec{j}\cdot d\vec{A}$$

For elektrostatiske felter, gælder at kurveintegralet af B-feltet, langs en lukket kurve, er lig med fladeintegralet af strømtætheden, som har kurven som randkurve.

For en uendelig lang retlinet leder, der gennemløbes af strømmen *I*, kan man som kurve vælge en cirkel med radius *r*, vinkelret på lederen gennem cirkels centrum. Af symmetrigrunde må B-feltet have retning langs tangenten på cirklen og må overalt have samme størrelse. Derfor:

$$\oint_{lukket\ kurve} \vec{B}\cdot d\vec{s} = 2\pi r B \quad \text{og} \quad \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int_{flade} \vec{j}\cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} I = \mu_0 I$$

Heraf følger Amperes lov: $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$

4. Hydrodynamikkens bevægelsesligninger

I en væske gælder der, at kraften pr rumfangsenhed (på et rumfangselement med massefylde ρ) er gradienten af trykket *p* plus de ydre kræfter. $\vec{F} = \vec{\nabla} p$.

Vi kan da opstille Newtons 2. lov for et rumfangselement.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\nabla} p + \vec{F}_{ydre}$$

Hvis der i væsken også optræder viskositet, skal der tilføjes et led $\boldsymbol{F_{visc}}$, men selvom det er muligt, at opstille et udtryk for viskositeten, findes der ingen analytisk løsning til de fremkomne ligninger, undtagen i to meget specielle tilfælde.

I hydrodynamikken kompliceres tingene af, at $\frac{d\vec{v}}{dt}$ er den "materielle differentialkvotient", hvor hastighedens komponenter ud over at kunne afhænge eksplicit af tiden *t* også afhænger af *x, y, z* , som afhænger af *t* (fordi væskeelementet flytter sig).
Det væskeelement, der til tidspunktet *t* har positionen (x,y,z) har til tidspunktet $t + \Delta t$ positionen $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$

Derfor skal man differentiere gennem *x, y, z*, for at udregne den materielle differentialkvotient. Vi viser nedenfor udregning for dv_x/dt. Differentiation af v_y og v_z sker helt på samme måde.

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial t} = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

Som kan sammenskrives til:

$$\frac{dv_x}{dt} = \vec{v}\cdot(\vec{\nabla} v_x) + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

Når man sammenskriver de 3 ligninger til en vektorligning får man:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\cdot(\vec{\nabla}\vec{v}) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Krydsproduktet af to vektorer **a** og **b** udregnes som: $\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y\ , a_z b_x - a_x b_z\ ,\ a_x b_y - a_y b_x)$
Man kan vise at:

$$\vec{v}\cdot(\vec{\nabla}\vec{v}) = (\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v} + \tfrac{1}{2}\vec{\nabla} v^2$$

Vi "nøjes" med at vise dette, idet vi udskriver x-komponenten af højresiden. Vi gør det i en række trin.

$$(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = (\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})$$

Vi udregner da x-koordinaten af krydsproduktet med $\boldsymbol{v}$.

$$((\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v})_x = (\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x})v_z - (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})v_y$$

Hvis man hertil lægger

$$\tfrac{1}{2}\vec{\nabla}_x(v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2) = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}$$

går leddene med $v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}$ *og* $v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}$ ud mod hinanden, og tilbage bliver: $v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}$
som påstået.

Bevægelsesligningen for en strømmende væske antager da formen:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{F}_{ydre} \quad\Leftrightarrow\quad \rho(\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v} + \tfrac{1}{2}\rho\vec{\nabla} v^2 + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \vec{F}_{ydre}$$

Den ydre kraft er oftest tyngdekraften, og hvis kraften er konservativ, (dvs. $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ hvilket ifølge Stokes 2.lov betyder, at integralet af $\boldsymbol{F}$ langs en lukket kurve er 0, som igen betyder at kurveintegralet af $\boldsymbol{F}$ mellem to punkter er uafhængig af den valgte vej), så kan $\boldsymbol{F}$ skrives som gradienten af en potentiel energi U.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

Herefter bliver bevægelsesligningen:

$$\rho(\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v}+\tfrac{1}{2}\rho\vec{\nabla}v^2+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\vec{\nabla}p-\vec{\nabla}U$$

5. Rotations frit strømningsfelt

Hvis væsken er overalt rotationsfri, altså $\vec{\nabla}\times\vec{v}=0$, så forsvinder bekvemt det første (matematisk problematiske) led og man får, idet man samler leddene på den venstre side:

$$\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}U+\tfrac{1}{2}\rho\vec{\nabla}v^2+\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0$$

Hvis der endvidere er tale om en laminar strømning, så den hastighed, hvormed væsken strømmer forbi et punkt uforandret, så $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0$. Vi kan da flytte gradient operatoren udenfor parentes og får:

$$\vec{\nabla}(p+U+\tfrac{1}{2}\rho v^2)=0 \qquad \text{som medfører at} \qquad p+U+\tfrac{1}{2}\rho v^2=konst$$

Hvis endelig at den ydre kraft er tyngdekraften, så den potentielle energi *U=ρgh,* finder man Bernoullis lov.

$$p+\rho gh+\tfrac{1}{2}\rho v^2=konst \quad \text{(langs en strømlinie).}$$

Bernoullis lov er ikke andet end en formulering af energisætningen, som en konsekvens af Newtons love. Den kan relativt nemt udledes uden anvendelse af vektoranalyse.

6. Hvirvelstrømme. Vortex

Vi går ud fra den generelle bevægelsesligning:

$$\rho(\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v}+\tfrac{1}{2}\rho\vec{\nabla}v^2+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\vec{\nabla}p-\vec{\nabla}U$$

Vi samler leddene på den højre side, og sætter gradienten udenfor en parentes:

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v}=-\vec{\nabla}(p+U+\tfrac{1}{2}\rho v^2)$$

Man definerer nu en *voticiteten* (hvirvelstrømsvektoren) som rotationen af hastighedsvektoren

$$\vec{\Omega}=\vec{\nabla}\times\vec{v}$$

Herefter kan bevægelsesligningen skrives:

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\rho\vec{\Omega}\times\vec{v}=-\vec{\nabla}(p+U+\tfrac{1}{2}\rho v^2)$$

Tager vi derefter rotationen på begge sider, forsvinder højre side fordi *rot grad* =0.

$$\rho\frac{\partial \vec{\nabla}\times\vec{v}}{\partial t}+\rho\vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v})=-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}(p+U+\tfrac{1}{2}\rho v^2)$$

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}+\vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v})=0$$

De 3 ligninger

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}+\vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v})=0 \qquad \vec{\Omega}=\vec{\nabla}\times\vec{v} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$$

Er de dynamiske bevægelsesligninger for hvirvelstrømning (vorticitet).

Selv om det kræver et mere formelt bevis, så udtrykker disse ligninger, at hvis vorticiteten $\boldsymbol{\Omega}$ = **0**, så er den også **0** til alle senere tidspunkter, og hvis $\boldsymbol{\Omega} \neq$ **0**, så vil den også være forskellig fra nul til alle senere tidspunkter.

De klassiske bevægelsesligninger, kan såvel beskrive turbulent strømning, og laminar strømning. Men ud fra disse ligninger kan man hverken forklare, hvorfor eller hvordan turbulent strømning opstår.
Så vidt jeg ved har man aldrig fundet en tilfredsstillende analytisk forklaring på turbulens.

Idet alle strømninger i vand eller luft udviser turbulens selv ved moderate hastigheder, er fysikken i den lidt underlige situation, at man har en smuk enkel afrundet matematisk teori, som blot i de fleste tilfælde ikke har ret meget at gøre med den virkelige verden.

Man kan dog illustrere teorien med nogle enkle eksempler:

Væske, der roterer i en cylinder med konstant vinkelhastighed ω: Der gælder:

$$\vec{r}=(x,y,z)=r(\cos\omega t,\sin\omega t,z)$$

$$\vec{v}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}=r(-\omega\sin\omega t,\omega\cos\omega t\,,0) \qquad \vec{v}=\omega(-y,x,0)$$

Vi udregner da vorticiteten: $\vec{\Omega}=\vec{\nabla}\times\vec{v}$. *x* og *y* komposanterne blive nul, fordi *x*, og *y* komposanterne af hastighedsvektoren ikke afhænger af *z* og, *z* komposanten af hastighedsvektoren ikke afhænger af *x* eller *y*.

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \omega(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z},\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}) = (0{,}0{,}2\omega)$$

$\vec{\Omega}$ er derfor konstant i størrelse og z-retning og $\Omega = 2\omega$ (Den dobbelte vinkelhastighed).

Et andet velkendt eksempel på en hvirvelstrøm er en "røg ring". Hvordan og hvorfor den dannes er meget svært at forklare, men den kan beskrives ved en torus.

Hvis en torus med radius R befinder sig i x-y planen og det cirkelformede tværsnit har radius r, så er parameterfremstillingen for en partikel, der bevæger sig en jævn cirkelbevægelse i et tværsnit af torus skrives som.

$$(x, y, z) = ((R + r\cos\omega t)\cos\varphi, (R + r\cos\omega t)\sin\varphi, r\sin\omega t)$$

At beregne $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ direkte ud fra det generelle udtryk, er ikke umagen værd, men ser vi på det tilfælde, hvor $\varphi = 0$, så $(x, y, z) = ((R + r\cos\omega t), 0, r\sin\omega t)$

Dette svarer til en jævn cirkelbevægelse i x-z planen, og derfor $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = (0{,}2\omega{,}0)$
Hvis man tegner feltlinier, som har retning af **Ω**, så er sådanne feltlinier lukkede kurver. Dette skyldes, at $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$. (Svarende til magnetiske feltlinier, idet $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ altid)

Helmholz formulerede den sætning, at integralet af **Ω** over en flade vinkelret på **Ω** er konstant.
Vortex fluxen gennem en flade, der følger med væskebevægelsen er konstant.
Et mere formelt bevis for dette er ret kompliceret, men man kan vise at Helmholz formodning i et simpelt tilfælde har impulsmomentbevarelse af væsken som konsekvens-
Vi ser på vorticiteten i et "cirkulært rør", der følger med strømningsfeltet. Lad tværsnitsarealerne af røret til to tidspunkter t_1 og t_2 være A_1 og A_2.
Massen af væsken i en skrive, der følger med væsken er den samme, $M_1 = M_2 = M$.
Helmholtz påstand er:

$$A_1\Omega_1 = A_1\Omega_1$$

Hvis man multiplicerer med massen M og indsætter $A_1 = \pi r_1^2$ og $A_2 = \pi r_2^2$, så finder man:

$M\pi r_1^2\, \Omega_1 = M\pi r_2\, \Omega_2$, men Ω er propotional med vinkelhastigden ω, så hver af de to udtryk er proåportional med inertimomentet $I = Mr^2$ gange vinkelhastigheden ω, som er lig med impulsmomentet.

Hvis man tilføjer viskositet til bevægelsesligningerne forøger det kompleksiteten betydeligt. Man kan godt skrive bevægelsesligningerne op, men ligningerne kan kun løse (så vidt jeg ved), i to tilfælde, nemlig en væske, der strømmer laminart mellem to plader, og væske, der passerer en kugle. Sidstnævnte kaldes i fysikken for Stokes lov.