Harmoniske svingninger

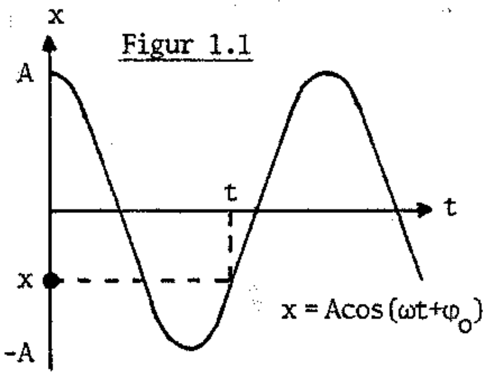
Elementær Fysik 2. Kap IV

Ole Witt-Hansen

(2016) 1979

KAP. IV HARMONISKE SVINGNINGER.

1. HARMONISK BEVÆGELSE.



Figur 1.1

En harmonisk svingning er en retlinet bevægelse, hvor positionens variation med tiden er givet ved en cos-funktion.
Betegner x positionen på en orienteret akse, skal der gælde:

$$(1.1) \qquad \boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

A kaldes for amplituden i bevægelsen, $\varphi = \omega t + \varphi_0$ kaldes for fasen, og φ_0 kaldes for begyndelsesfasen. ω kaldes som tidligere for vinkelhastigheden eller for den cykliske frekvens.
Ofte vil man vælge begyndelsesfasen $\varphi_0 = 0$ eller $\varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi$. I disse tilfælde skrives den harmoniske svingning blot som

$$(1.2) \qquad x = A\cos\omega t \qquad \text{eller} \qquad x = A\sin\omega t$$

Da cos er en periodisk funktion, der antager værdier mellem -1 og 1, er den harmoniske svingning en periodisk bevægelse, der antager værdier mellem -A og A.
Perioden T er defineret som den tid det tager at gennemføre en svingning, d.v.s. det tidsrum, der giver fasen en tilvækst på 2π.

$$(1.3) \qquad \omega(t + T) = \omega t + 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frekvensen ν er defineret som den reciprokke værdi af perioden

$$(1.4) \qquad \nu = \frac{1}{T} \Leftrightarrow \omega = 2\pi\nu \Leftrightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

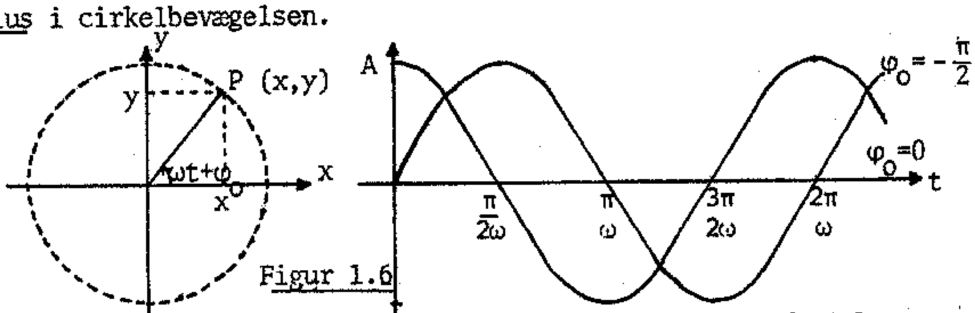
Hvis punktet P udfører en jævn cirkelbevægelse i planen, vil projektionen af P på koordinatakserne udføre harmoniske svingninger.

Kap IV

Dette følger umiddelbart ved at opskrive koordinaterne til P.

(1.5) $$P = (x,y) = (r\cos(\omega t + \varphi_0)\ ,\ r\sin(\omega t + \varphi_0))$$

Man ser at amplituden i de harmoniske svingninger bliver lig med radius i cirkelbevægelsen.



Figur 1.6

Det er klart at enhver harmonisk svingning med amplitude A kan opfattes som projektionen på x-aksen af en jævn cirkelbevægelse med radius A og samme vinkelhastighed og begyndelsesfase.
Heraf følger, at hastigheden og accelerationen i den harmoniske svingning kan beregnes som x-koordinaten af hastighedsvektoren og accelerationsvektoren i den jævne cirkelbevægelse.
Dette er en følge af ligningerne

(1.7) $$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega\sin(\omega t+\varphi_0) \quad \text{og} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$$

Vi har i (7.1) anvendt resultaterne (7.3) og (7.4) side 31-32.

For den harmoniske svingning med amplitude A finder vi således følgende udtryk for position x, hastighed v og acceleration a:

(1.8) $$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \text{(Positionen)}$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad \text{(Hastigheden)}$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \text{(Accelerationen)}$$

Udfører en partikel med massen m en harmonisk svingning, vil den være påvirket af en resulterende kraft $F_{res} = ma$.

(1.9) $$F_{res} = ma = -m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_o) = -m\omega^2 x = -k\cdot x \quad (k = m\omega^2)$$

Af (1.9) ser man, at for den harmoniske svingning er den resulterende kraft altid rettet mod ligevægsstillingen ($x = 0$) og er proportional med forskydningen x fra denne ligevægtsstilling.

Hvis man omvendt har en partikel med masse m, der udfører en bevægelse, således at den resulterende kraft $F_{res} = -kx$ og x er forskydningen fra en ligevægtsstilling, kan man slutte, at partiklen udfører en harmonisk svingning. Den cykliske frekvens ω og svingningstiden T kan beregnes ved sammenligning med (1.9).

(1.10) $$F = -kx \;\wedge\; k = m\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

2. HOOKES LOV. HARMONISK OSCILLATOR.

For alle faste elastiske stoffer gælder det, at den kraft, der skal til at deformere et legeme for små deformationer, er proportional med deformationen.

Vi skal indskrænke os til at betragte deformationer i én dimension. Dette kan f.eks. være strækning af en streng under påvirkning af en kraft F. Den forlængelse x, som en streng får, når den strækkes med en kraft F, er ligefrem proportional med strengens længde L og omvendt proportional med strengens tværsnitsareal A. (Homogen streng).

(2.1) $$x = \frac{1}{E}\frac{L}{A}F \Leftrightarrow F = E\frac{A}{L}x \Rightarrow F = k\cdot x$$

E er en materialkonstant, som kaldes Youngs modul. Den har enheden N/m^2. Relationen (2.1) kaldes for Hookes lov.

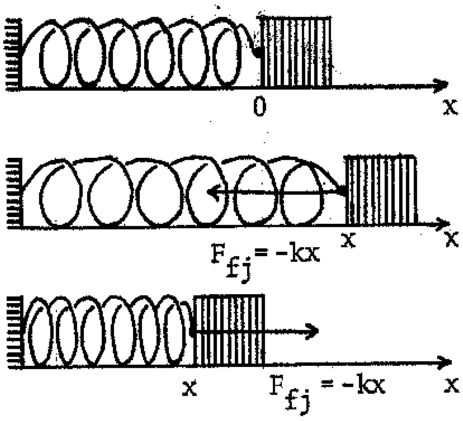
Afhængigheden af længden L og tværsnitsarealet er indlysende.

Hver længdeenhed af en streng er påvirket af den samme strækningskraft F og forlænges derfor det samme stykke. ($x \sim L$)

Gøres strengen dobbelt så tyk vil det svare til to strenge i parallel, hver påvirket af den halve kraft. De får derfor kun den halve forlængelse. ($x \sim \frac{1}{A}$)

Kap IV

Figur 2.3



Proportionaliteten mellem kraftpåvirkning og forlængelse gælder også for en spiralfjeder.

(2.2) $F = k \cdot x$ (Hookes lov)

F er den kraft, som man skal påvirke fjederen med for at strække eller sammenpresse den stykket x fra den ustrakte tilstand. Proportionalitetskonstanten k kaldes i dette tilfælde for fjederkonstanten, den har S.I. enheden N/m.

Det bemærkes, at Hookes lov kun gælder for så moderate kraftpåvirkninger, at fjederen vender tilbage til sin oprindelige form efter at kraften er ophørt med at virke. Selv inden for dette område kan nogle fjedre godt afvige noget fra proportionaliteten. En fjeder der opfylder Hookes lov, kaldes derfor ideal.

En partikel, der udfører en harmonisk svingning, kaldes for en harmonisk oscillator.

Figur (2.3) viser et legeme med masse m, der er placeret på et glat bord, og som er bundet til en ideal fjeder med fjederkonstant k.
På en orienteret x-akse vælder vi nulpunktet x=0 ved ligevægtsstillingen.
Forskydes klodsen stykket x bort fra ligevægtsstillingen, kræver det en kraft, der ifølge Hookes lov er $F = kx$. I ligevægt må fjederen da virke med en kraft F_{fj}, som er lige så stor, men modsat rettet F.

(2.4) $$F + F_{fj} = 0 \Rightarrow F_{fj} = -kx$$

Slippes klodsen, vil den udelukkende være påvirket af fjederkraften, som da er lig med den resulterende kraft. Se figuren ovenfor.
Når klodsen svinger frit, er den således påvirket af en resulterende kraft, som er rettet mod ligevægtsstillingen, og proportional med

forskydningen fra denne, og klodsen vil derfor udføre harmoniske svingninger efter formlen: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, hvor k ifølge (1.10) er bestemt af formlen: $k = m\cdot\omega^2$. Svingningstiden T kan da bestemmes af dette udtryk.

(2.5) $$k = m\omega^2 \wedge T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Det bemærkes, at svingningstiden er uafhængig af amplituden A i bevægelsen.

Amplituden A og begyndelsesfasen φ_0 afhænger af hvorledes oscillatoren startes. Er positionen x_0 og hastigheden v_0 kendte til tidspunktet t=0, kan A og φ_0 beregnes af ligningerne (1.8) side 54.

Trækkes klodsen f.eks. ud til positionen $x_0 = A$, hvor den slippes til tidspunktet t=0 (v_0=0), vil den udføre en harmonisk svingning af formen: $x = A\cos\omega t$.

2.6 Eksempel. En masse $m = 200\,g$ er gnidningsfrit bundet til en ideal fjeder med fjederkonstant $k = 20\,N/m$.

Til tidspunktet t=0 passeres ligevægtsstillingen med hastigheden $v_0 = -0{,}50\,m/s$.

a) Beregn svingningstiden, amplituden og begyndelsesfasen, samt opskriv positionens variation med tiden.

Løsning: Svingningstiden beregnes af formlen (2.5).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}20\,kg}{20\,N/m}} = 0{,}63\,s$$

Indsættes begyndelsesbetingelserne i formlerne (8.1)

$$x = A\cos(\omega t+\varphi_0) \quad og \quad v = -\omega A\sin(\omega t+\varphi_0)\text{, får man,}$$

$$0 = A\cos(\omega 0+\varphi_0) \quad og \quad -0{,}50 = -\omega A\sin(\omega 0+\varphi_0)$$

Man ser af ligningerne at $\cos\varphi_0 = 0$, samtidig med at $\sin\varphi_0$ er positiv. Dette giver løsningen $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$.

A beregnes da af den anden ligning, idet $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20\,N/m}{0{,}20\,kg}} = 10\,s^{-1}$

$$A = \frac{v}{\omega} = \frac{0{,}05\,m/s}{10\,Hz} = 0{,}05\,m.$$

Udtrykket for den harmoniske svingning bliver da: (Enheder udelades

$$x = 0{,}05\cos(10t+\tfrac{1}{2}\pi) = -0{,}05\sin 10t$$

Kap IV

I bind 1 udledte vi et udtryk for det arbejde, der skal udføres på en ideal fjeder med fjederkonstant k for at strække eller sammenpresse den stykket x. Dette arbejde definerede vi som fjederens potentielle energi i den strakte eller sammenpressede tilstand.

(2.7) $$E_{pot} = \frac{1}{2} k x^2$$ (Potentiel energi af en fjeder)

Vi vil nu direkte vise, at når en masse m udfører en harmonisk svingning, er den mekaniske energi $E = E_{kin} + E_{pot}$ den samme til ethvert tidspunkt. (Energibevarelse).

$$E = E_{kin}+E_{pot} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$ Ifølge (8.1) får man:

$$E = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi_0) + \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$$ $m\omega^2 = k$ indsat:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2(\sin^2(\omega t+\varphi_0) + \cos^2(\omega t+\varphi_0)) = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Den mekaniske energi er konstant, (som vi forventede), og den er lig med den potentielle energi af oscillatoren, når denne er i yderstillingen.

2.9 Eksempel.

Et kasteapparat til at opsende lerduer består af en idealfjeder med fjederkonstant $k = 2\ 10^4$ N/m. Fjederen sammenpresses 10 cm, hvor den låses fast. Lerduen anbringes i kasteapparatet, og når det udløses, slynges lerduen ud, idet fjederen retter sig ud til sin ustrakte stilling. Massen af lerduerne er 200 g.

a) Idet man ser bort fra gnidningskræfter m.v., skal man beregne udgangsfarten af lerduerne.

Løsning: Vi benytter energibevarelse, idet fjederens potentielle energi omsættes til kinetisk energi af lerduen.

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x = \sqrt{\frac{2\ 10^4\ \text{N/m}}{0{,}20\ \text{kg}}}\ 0{,}10\ \text{m} = 32\ \text{m/s}$$

Vi har set bort fra en eventuel kinetisk energi af fjederen.

3.10 Eksempel. En badevægt er baseret på sammenpresning af en ideal fjeder med fjederkonstant $k = 10^5 N/m$. En person med massen 60 kg hopper op på badevægten, således at bevægelsen lige før personen rammer vægten kan betragtes som et frit fald fra højden $h = 1$ cm.

a) Beregn fjederens maximale sammentrykning x.

b) Hvor stort er udslaget på vægten ved den maximale sammentrykning.

Løsning: Vi benytter energibevarelse. Når fjederen er sammenpresset stykket x, har personen mistet en potentiel energi $E_{pot} = mg(h+x)$. Denne energi er omdannet til potentiel energi i fjederen $E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$. Vi sætter $g = 10\, m/s^2$ og udelader enheder i mellemregningerne.

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = mg(h+x) \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}kx^2 - mgx - mgh = 0 \Rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}10^5 x^2 - 600x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}0185 \vee x = -0{,}0065$$

Idet vi forkaster den negative løsning, ser vi at sammentrykningen bliver $x = 1{,}85$ cm.

Hvad vægten vil vise ved denne sammentrykning, kan beregnes af ligningen:

$$F_T = F_{fj} \Leftrightarrow mg = kx \Leftrightarrow m = \frac{kx}{g} = \frac{10^5 0{,}0185}{10}\, kg = 185\, kg$$

3. DIFFERENTIALLIGNING FOR DEN HARMONISKE SVINGNING.

For en harmonisk oscillator, hvor en masse m er bundet til en ideal fjeder med fjeder-konstant k gælder der: $F_{res} = F_{fj} \Leftrightarrow ma = -kx$

$$ma = -kx \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{3.1}$$

(3.1) kaldes for en differentialligning af 2. orden, idet den ukendte funktion $x = x(t)$ optræder i ligningen sammen med den 2. afledede af denne funktion.

At løse differentialligningen går ud på at bestemme samtlige funktioner $x = x(t)$, således at $x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$.

I matematikundervisningen bevises, at den fuldstændige løsning til

differentialligningen kan skrives på formen: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$.
A, φ_0 og ω er konstanter. At det er en løsning bevises ved differentiation.

$$x'(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{og} \quad x''(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Indsættes i differentialligningen $x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$ fås:

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = -\frac{k}{m}A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Man ser at $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ er løsning til differentialligningen, hvis og kun hvis

(3.2) $$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

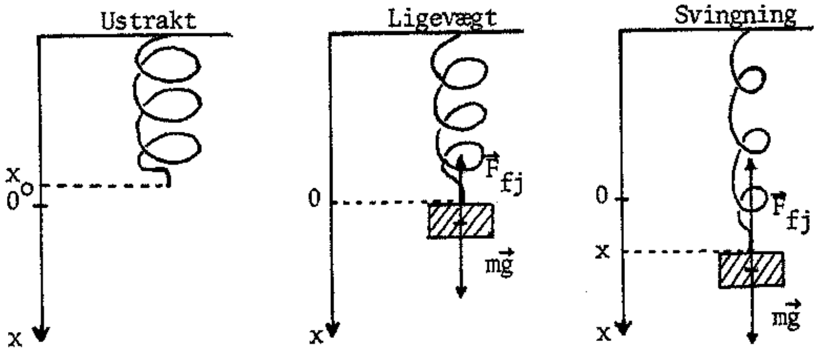
En bevægelse, der opfylder differentialligningen (3.1) vil således være en harmonisk svingning med cyklisk frekvens $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, og hvor amplitude A og begyndelsesfase φ_0 bestemmes af begyndelsesbetingelserne.

4. EKSEMPLER PÅ HARMONISK SVINGNING.

4.1 Eksempel. Det lodret svingende lod

Vi betragter et lod, der er ophængt lodret i en ideal fjeder med fjederkonstant k. Foruden fjederkraften vil loddet være påvirket af tyngden $F_T = mg$.

Vi vil vise, at loddet udfører harmoniske svingninger, når det bringes bort fra ligevægtsstillingen og overlades til sig selv.



HARMONISK SVINGNING

På figuren har vi valgt $x=0$ ved ligevægtsstillingen, mens fjederens ustrakte stilling er markeret med x_o. Når fjederen er spændt til positionen x, er fjederkraften således: $F_{fj} = -k(x - x_o)$, idet $x - x_o$ er forskydningen fra den ustrakte stilling.
I ligevægtsstillingen er den resulterende kraft lig med nul.

$$F_{res} = F_T + F_{fj} = 0 \Leftrightarrow mg - k(0 - x_o) = 0 \Leftrightarrow mg + kx_o = 0$$

Når loddet svinger, er den resulterende kraft $F_{res} = F_T + F_{fj}$

$$F_{res} = mg - k(x - x_o) \Leftrightarrow F_{res} = mg - kx + kx_o \Leftrightarrow F_{res} = -kx$$

For at opnå det sidste udtryk har vi benyttet ligevægtsbetingelsen. Vi ser således, at for det lodret svingende lod er den resulterende kraft proportional med forskydningen fra ligevægtsstillingen og rettet mod denne, så loddet vil udføre harmoniske svingninger.
Den cykliske frekvens ω og svingningstiden T beregnes som sædvanlig af formlen:

$$k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Energiforhold: Til den potentielle energi af fjederen $\frac{1}{2}k(x - x_o)^2$, må adderes den potentielle tyngdeenergi af loddet $-mgx$.
En regning viser:

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2}k(x - x_o)^2 - mgx = \tfrac{1}{2}kx^2 + \tfrac{1}{2}kx_o^2 - kxx_o - mgx$$

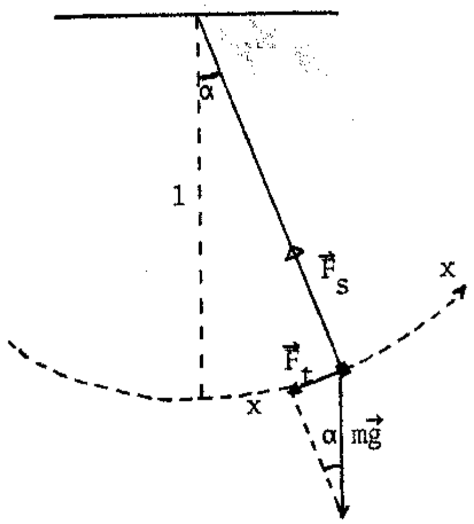
De sidste to led: $-kxx_o - mgx = -x(kx_o + mg) = 0$ på grund af ligevægtsbetingelsen. For den potentielle energi af det lodret svingende lod finder man da udtrykket:

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2}kx^2 + \tfrac{1}{2}kx_o^2$$

Leddet $\frac{1}{2}kx^2$ fortolkes som fjederenes potentielle energi ved forskydningen x fra ligevægtsstillingen og leddet $\frac{1}{2}kx_o^2$ er fjederens potentielle energi ved forskydningen fra den ustrakte tilstand.
Den mekaniske energi er naturligvis også bevaret for det lodret svingende lod.

Kap IV

4.2 Eksempel. Matematisk pendul.



Et lod med massen m, der ophængt i tyngdefeltet udfører svingninger i samme lodrette plan, kaldes et matematisk pendul.
Loddets bevægelse er en ujævn cirkelbevægelse under påvirkning af Tyngden $F_T = mg$ og snorkraften F_s. Længden af ophænget kaldes for pendullængden og betegnes l.
Af figuren fremgår, at centripetalkraft F_c og tangentialkraft F_t er givet ved udtrykkene nedenfor.

(4.2.1) $\quad F_c = F_s - mg\cos\alpha \quad$ og $\quad F_t = mg\sin\alpha$

For små udsving ($\alpha < 10^o$) er $\sin\alpha \approx \alpha$. I samme tilnærmelse kan bevægelsen betragtes som retlinet langs en orienteret x akse.
F_t er da den resulterende kraft langs denne akse. På figuren betegner x den med fortegn regnede buelængde ud fra ligevægtsstillingen.
Buelængden er lig med centervinklen α gange radius l. Heraf fås:

(4.2.2) $\quad \sin\alpha \approx \alpha = \frac{x}{l}$ giver indsat i (4.2.1): $\quad F_t = -\frac{mg}{l}x$

Man ser heraf, at der langs med x-aksen er proportionalitet mellem den resulterende kraft $F_{res} = F_t$ og forskydningen x. Minustegnet fremkommer fordi F_t er rettet mod ligevægtsstillingen, modsat x.
Idet der således gælder:

$$F_{res} = F_t = -kx \quad \text{med} \quad k = \frac{mg}{l} \; ,$$

vil loddet udføre harmoniske svingninger. Svingningstiden T beregnes som sædvanlig af relationerne: $k = m\omega^2$ og $\omega T = 2\pi$.

(4.2.3) $\quad k = m\omega^2 = \frac{mg}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$