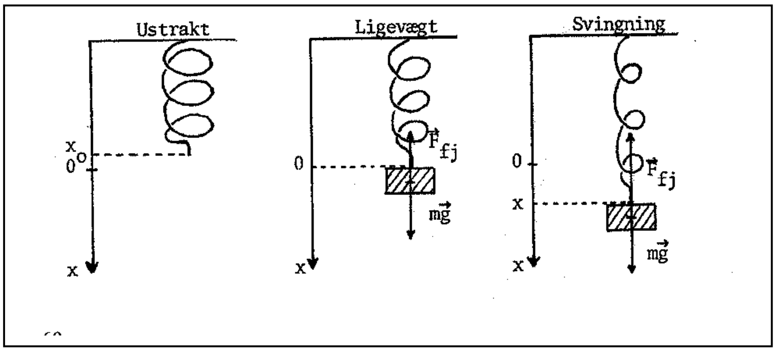
Harmonisk svingning
Betydningen af fjederens masse

1. Fjedermassens betydning i den statiske situation
Vi forestiller os at fjederen med fjederkonstant k har den ustrakte længde l_0 , og massen m_{fj} .
Når fjederen ophænges i tyngdefeltet, vil den forlænges en lille smule, som følge af dens egen tyngde.



Positionen af fjederen regnet fra ophængningspunktet betegnes l.
Tyngdekraften, der virker på denne del af fjederen er:

$$F(l) = \frac{l_0 - l}{l_0} m_{fj} g ,$$

Fjederkonstanten for stykket l af fjederen er $k(l) = \frac{l_0}{l} k$.

Tilføjer vi stykket dl svarende til en masse $dm = \frac{m_{fj}}{l_0} dl$, vil vi få en forlængelse $dx = \frac{dm \cdot g}{k(l)}$

$$dx = \frac{gdm}{k(l)} = \frac{\frac{m_{fj}}{l_0} dl \cdot g}{\frac{l_0}{l} k} = \frac{m_{fj} g}{k l_0^2} l dl$$

Vi bestemmer da forlængelsen af hele fjederen ved integration fra 0 til l_0.

$$x_{fj} = \int_0^{l_0} \frac{m_{fj} g}{k l_0^2} l dl = \frac{1}{2} \frac{m_{fj} g}{k}$$

Når fjederen belastes med et lod m_{lod} er den målte forlængelse i den statiske situation x_{lod} ,men den faktiske forlængelse er $x_{lod} + x_{fj}$.,

$$F_T = F_{fj} = m_{lod} g = kx = k(x_{lod} + x_{fj}) = kx_{lod} + \frac{1}{2} m_{fj} g$$

Afbilder man derfor $m_{lod}g$ som funktion af x_{lod}, vil man få en ret linie, der skærer 2. aksen i $\frac{1}{2} m_{fj} g$.
Hvilken indflydelse det har på de dynamiske forhold, er behandlet nedenfor, men i det statiske tilfælde optræder i hvert fald den halve fjedermasse.

2. Fjedermassens betydning i den dynamiske situation
Vi udregner den kinetiske energi af en fjeder, med massen m_{fj}, hvori der er ophængt et lod, som udfører en harmonisk svingning. Fjederens lineære udstrækning er L, målt på en x-akse.
Massen dm på stykket dx af fjederen er lig med:

$$dm = \frac{dx}{L} m_{fj}$$

Punktet med koordinaten x, vil svinge med en hastighed

$$v_x = \frac{x}{L} v_L ,$$

hvor v_L er hastigheden af fjederens endepunkt (loddets hastighed). Vi udregner da den kinetiske energi af massen dm:

$$dE = ½ dm\, v_x^{\,2} = ½ \frac{dx}{L} m_{fj} (\frac{x}{L} v_L)^2 = ½ m_{fj} \frac{v_L^{\,2}}{L^3} x^2 dx$$

Hvorefter E_{kin} bestemmes ved integration over x fra 0 til L.

$$E_{kin} = ½ m_{fj} \frac{v_L^{\,2}}{L^3} \int_0^L x^2 dx = \tfrac{1}{2} (\tfrac{1}{3} m_{fj}) v_L^{\,2}$$

Man ser, at fjederen bidrager med en tredjedel af dens masse til den kinetiske energi. Da det er den masse, der indgår i bevægelsesligningerne, så vil den også indgå i formlen for svingningstiden.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{hvor} \quad m = m_{lod} + \tfrac{1}{3} m_{fj}$$

Svingningstiden er givet ved: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m$.
Hvis $m = m_{lod} + \tfrac{1}{3} m_{fj}$ så bliver ligningen:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m = \frac{4\pi^2}{k} m_{lod} + \frac{4\pi^2}{k} \tfrac{1}{3} m_{fj} .$$

Afsætter man T^2 som funktion af m_{lod}, skulle man derfor få en ret linie med hældning:

$\frac{4\pi^2}{k}$, og som afskærer $\frac{4\pi^2}{k} \tfrac{1}{3} m_{fj}$ på y-aksen (T^2 –aksen).

Jeg har nogle gange forsøgt, at bestemme fjedermassen både statisk og dynamisk, men det har ikke været egnet til elevøvelse, fordi resultaterne har været svære at tolke.
Hvis den rette linie skærer x-aksen, den positive halvakse, som altså svarer til en negativ fjedermasse, så tror jeg det er fordi fjedrene er "underspændte", hvilket betyder, at der skal en vis kraft F_0 for at fjederen begynder at strækkes.

Harmonisk svingning
Betydningen af fjederens masse

03-02-2009 ow.