

Gyroskoper, snurretoppe, roterende æg og andre roterende genstande



Indhold

1. Rotation	1
2. Snurretoppe og gyroskoper	1
2.1 Forsøg med gyroskop	5
2.2 Ægget, der rejser sig på højkant	5
3. Roterende hjuls fysik	9

1. Rotation

Det er vist mere end 30 år siden at begreberne kraftmoment, impulsmoment, impulsmomentbevarelse samt teorien for rotation var en del af 2g's pensum på fysikergrenen i gymnasiet. I min lærebog Elementær Fysik 2 fra 1979 er der faktisk et ret omfattende kapitel om rotation. Nok betydelig mere omfattende end hvad bekendtgørelsen krævede dengang. Men kapitlet indeholder ikke noget om gyroskoper, som er emnet for denne artikel.

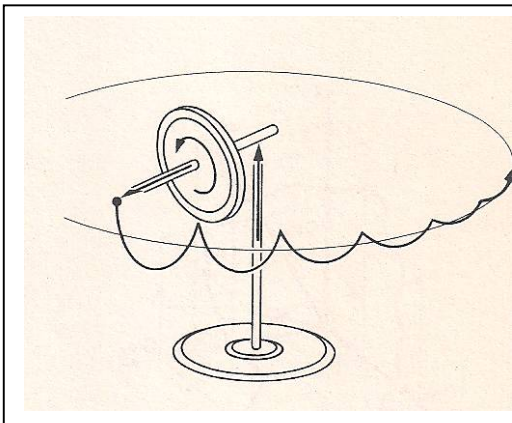
Lidt mere overraskende er det, som jeg tilfældigvis fandt ud af, er at behandlingen af rotation i min 2g lærebog også er mere omfattende og på et teoretisk højere niveau end: Hugh D. Young: University Physics fra 2008. Men der er jo sket meget i fysikundervisningen fra 1975 til 2005.

Sandt nok, så forekom teorien for rotation allerede i begyndelsen af 1980'erne ganske matematisk krævende, hvis man ikke nøjedes med en helt overfladisk og dermed uinteressant gennemgang. Det krævede nemlig både et solidt kendskab til vektorer i rummet, skalar- og krydsprodukt, kraftmoment, impulsmoment, differential- og integralregning, samt regning med differentialer, som man nu gør det i fysik.

2. Snurretoppe og gyroskoper

Hvorfor så beskæftige sig med rotation, når det nu er så matematisk krævende? En af grundene er at rotation har nogle overraskende konsekvenser, det gælder blandt andet cykelkørsel, men især har mange været forundret over opførselen af en gyro, som ikke kan forklares uden at indføre den vektorielle formulering af teorien for rotation.

Gyroer har været solgt som legetøj i mindst 100 år, hvor den ene ende af omdrejningsaksen hviler (ikke fastspændt) på toppen af et (Eiffel)tårn, hvorefter gyroen udfører en vandret bevægelse i stedet for at falde ned, som man skulle tro.



Figuren viser en gyro, hvor man tænker sig, at omdrejningsaksen er holdt vandret, hvorefter den slippes. Efter normale begreber skulle gyroen falde ned, hvilket den også vil gøre, hvis svinghjulet ikke har et tilstrækkeligt inertimoment, og rotationshastigheden ikke er tilstrækkelig høj.

Det der sker, er imidlertid at den falder et lille stykke, men så retter den sig op. Derefter begynder gyroen en vandret cirkelbevægelse (en præcession) i begyndelsen fulgt nogle mindre lodrette bevægelser, som vis på figuren til venstre. Den såkaldte nutation.

Med anvendelse af Newtons love for rotation opskrevet på vektor form er det nu ikke så vanskeligt at forklare gyroskopets opførsel, ligesom man relativt nemt kan beregne frekvensen i præcessionsbevægelsen.

Rotation om en fast akse svarer rent matematisk til en retlinet bevægelse, blot er strækningen s erstattet af en drejningsvinkel θ . Mens hastighed for en retlinet bevægelse er defineret som

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

så er vinkelhastigheden ω for rotation defineret som

$$(2.1) \quad \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

For et udstrakt stift legeme, der roterer om en fast akse er vinkelhastigheden den samme for alle dele af legemet.

Hvis r er den vinkelrette afstand fra omdrejningsaksen er hastigheden af et partikel $v = \omega r$.

Man definerer kraftmomentet som "kraft gange arm" $H = rF_{\perp}$, hvor F_{\perp} er kraften, der virker vinkelret på r . Opskrevet med vektorer, er det ret let at vise, at Kraftmomentet kan skrives som krydsproduktet af vektorerne "arm" og "kraft"

$$(2.2) \quad \vec{H} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Hvis \vec{r} og \vec{F} er parallelle er kraftmomentet 0

Krydsproduktet \vec{c} af to vektorer \vec{a} og \vec{b} skrives: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Det er en vektor, der er vinkelret på såvel \vec{a} og \vec{b} , således at $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nævnt i denne rækkefølge, danner en højreskrue. Længden af krydsproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$, som skrives er: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, hvor φ er den numerisk mindste vinkel, der fører \vec{a} over i \vec{b} .

En højreskrue er en drejning med højre hånd, der fører \vec{a} over i \vec{b} i positiv omløbsretning, og hvor så \vec{c} ligger i tommelfingerens retning. Samme bevægelse, som når man med højre hånd skruer en skrue ind. Et tre retvinklet koordinatsystem (x, y, z) danner f.eks. en højreskrue.

Hvis $\vec{F} \perp \vec{r}$ er størrelsen af kraftmomentet $r \cdot F$, ellers er

$$(2.3) \quad H = rF \sin \varphi$$

hvor φ er den numerisk mindst vinkel mellem retningen af \vec{r} og \vec{F} .

Retningen af kraftmomentet svarer til positive omløbsretning, som kraftmomentet drejer legemet i.

Impulsmomentet er for en partikel med hensyn til et punkt eller med hensyn til en akse er helt generelt defineret som

$$(2.4) \quad \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Hvis \vec{r} og \vec{v} er parallelle er impulsmomentet lig med 0. For størrelsen af L får man:

$$(2.4) \quad L = mrv \sin \varphi = mr^2 \omega \sin \varphi$$

Ved differentiation af ligningen $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ med hensyn til tiden

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{H}$$

$$(2.5) \quad \vec{H} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

For at bestemme impulsmomentet og kraftmomentet for et udstrakt legeme er det nødvendigt at dele det op i partikeldele med massen m_i og summere. Vi antager at legemet roterer om en fast akse, så impulsmomentet for alle dele af legemet har samme retning. Alle legemets dele har samme vinkelhastighed ω .

Partiklen m_i i afstanden r_i fra omdrejningsaksen har hastigheden $v_i = r_i\omega$.

Bedraget til impulsmomentet fra denne partikeldel er derfor: $L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega r_i = m_i r_i^2 \omega$

Det samlede impulsmoment findes da ved at summere.

$$(2.6) \quad L = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_i m_i r_i^2 = I\omega$$

$$(2.7) \quad I = \sum_i m_i r_i^2$$

I kaldes for legemets inertimoment med hensyn til den pågældende akse.

Inertimomentet beregnes oftest ved integration:

$$(2.8) \quad I = \int r^2 dm$$

For eksempel er inertimomentet for en cirkelskive med hensyn til en akse vinkelret på skiven gennem dets centrum.

$$(2.9) \quad I_{skive} = \int_0^r r^2 dm = \int_0^r r^2 \rho dV = \frac{m}{\pi r^2} \int_0^r r^2 2\pi r dr = \frac{m}{r^2} \left[\frac{2}{4} r^4 \right]_0^r = \frac{1}{2} mr^2$$

Da der samtidig gælder, at $H = \sum_i H_i$, vil der for rotation omkring en akse gælde

$$(2.10) \quad H = \frac{dL}{dt} \quad H = I \frac{d\omega}{dt} \quad H = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Eller skrevet på vektorform også for et system af partikler eller et stift legeme

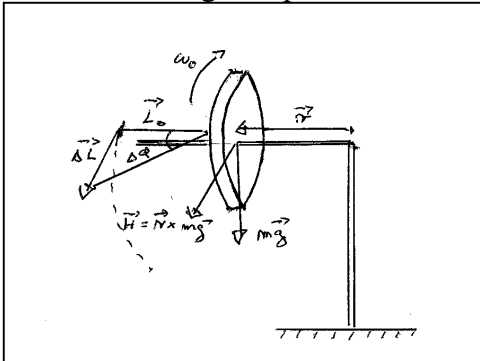
$$(2.11) \quad \vec{H} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \vec{H} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{H} = \Delta\vec{L}\Delta t$$

Hvor

$$\vec{H} = \sum_i \vec{H}_i \quad \text{og} \quad \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

For at forstå de følgende eksempler, er det vigtigt at understrege vektor karakteren af ligningerne ovenfor. For det første er det vektorligninger.

Ændringen i impulsmomentet $\Delta \vec{L}$ har altid den samme retning som \vec{H} , langs omdrejningsaksen. Det er der ikke noget særligt overraskende i, men hvis systemet i forvejen har et impulsmoment i en anden retning, så opstår der uventede fænomener.



Gyroen har vinkelhastigheden ω_0 . omløbsretningen er vist på tegningen og retningen af impulsmomentet L_0 er langs med omdrejningsaksen.

Kraftmomentet med hensyn til understøtningspunktet udregnes som $\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{g}$, og det størrelse er lig med $H = mgr$, idet $\vec{r} \perp m\vec{g}$.

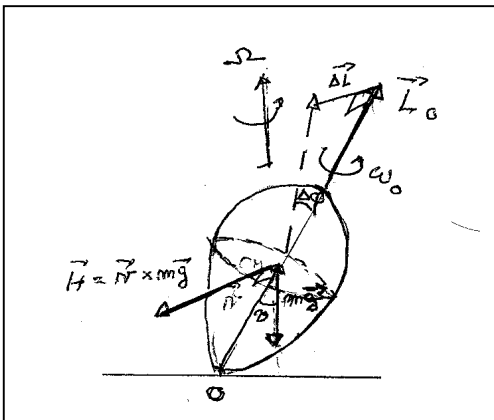
Idet retningen af \vec{H} er vinkelret på \vec{r} og \vec{g} og er \vec{H} rettet vinkelret på \vec{L}_0 i vandret plan. Det betyder imidlertid at $\Delta \vec{L} = \vec{H}\Delta t$ har den samme retning, og gyroen vil indstille sig med retningen $\vec{L}_0 + \Delta \vec{L}$, som er drejet en vinkel $\Delta\phi$ i forhold til \vec{L}_0 . Af figuren ses:

$$(2.12) \quad \tan \Delta\phi \approx \Delta\phi = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{mgr\Delta t}{L_0} = \frac{mgr\Delta t}{I_0\omega_0}$$

Heraf finder man vinkelhastigheden i præcessionen.

$$(2.13) \quad \Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{mgr}{I_0\omega_0}$$

Mere almindeligt er en snurretop eller et gyroskop, der er placeret på et vandret underlag. Kraftmomentet på snurretoppen med hensyn til understøtningspunktet udregnes på samme måde som før $\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{g}$, som giver $H = mgr \sin\theta$. Massen af snurretoppen er m , mens r er afstanden fra understøtningspunktet O til snurretoppens massemidtpunkt G . θ er vinklen mellem rotationsaksen og lodret.



Retningen af $\Delta \vec{L} = \vec{H}\Delta t$, er den samme som i eksemplet ovenfor, og \vec{L}_0 vil få en vandret forskydning i positiv omløbsretning. Drejningsvinklen beregnes som før

$$\tan \Delta\phi \approx \Delta\phi = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{mgr \sin\theta \Delta t}{L_0} = \frac{mgr \Delta t}{I_0\omega_0}$$

Og dermed vinkelhastighed i præcessionen

$$(2.14) \quad \Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{mgr \sin\theta}{I_0\omega_0}$$

2.1 Forsøg med gyroskop



Til venstre er vist et gyroskop, af den type, der handles som legetøj. Vi kan kun lave en kvalitativ sammenligning med teorien, alene af den grund, at der ikke er nogen simpel måde at måle omløbsfrekvensen.

Massen af hele gyroen er 128 g, og skønmæssigt sættes massen af den roterende skive til 100 g.

For denne gyro er det meste af massen placeret i randen af i en afstand 2,6 cm. For inertimomentet af skiven

anvender vi derfor formlen $I = mr^2$ i stedet for inertimomentet af en homogen skive $I = \frac{1}{2}mr^2$.

Afstanden fra understøtningspunktet til massemidtpunktet af gyroen er 4,0 cm.

Antager vi endvidere at vinklen mellem gyroens rotationsakse og lodret er 30° , og at vi forsøgsvis sætter omløbsfrekvensen til 10 Hz, kan vi foretage en beregning af præcessionsfrekvensen ud fra formlen (2.14)

$$(2.15) \quad \Omega = \frac{mgr \sin \theta}{I_0 \omega_0} = \frac{0,128 \cdot 9,82 \cdot 0,040 \cdot \sin 30}{0,10 \cdot 0,026^2 \cdot 2\pi \cdot 10} \text{ Hz} = 5,9 \text{ Hz}$$

Heraf bestemmes omløbstiden

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 1,1 \text{ s}$$

Ved forsøg med gyroen, måler man omløbstider fra omkring 1,2 s til 2,1 s, afhængigt af hvor meget fart, man har givet den roterende skive. Ifølge ovenstående svarer dette til omløbsfrekvenser på 10 Hz til 20 Hz, så dette simple kvalitative forsøg afkræfter i alle tilfælde ikke teorien.

2.2 Ægget, der rejser sig på højkant

Jeg kan huske fra min barndom, at nogen demonstrerede for mig, at tager man et hårdkogt æg og sætter det i hurtig rotation, så kan man få det til at rejse sig og rotere om æggets længdeakse.

Dette kan ikke forklares ved energibetragtninger, da ægget jo på denne måde forøger sin potentielle energi, mens det jo er sådan at et mekanisk system altid vil søge mod en tilstand med lavere potentiel energi.

Kunsten kan også udføres med et æg af marmor, som vist på figurerne nedenfor.



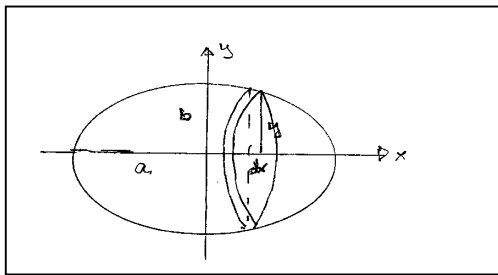
Hvis ægget roterer om lilleaksen, så omdrejningsaksen går gennem berøringspunktet, vil gnidningskraften fra underlaget ikke kunne give anledning til et kraftmoment, der kan ændre

retningen af omdrejningsaksen. Men hvis ægget har forskubbet sig en lille smule, så omdrejningspunktet er forskudt i forhold omdrejningsaksen, så stiller sagen sig anderledes.

Det er som sagt ikke altid lige nemt, at få ægget på højkant, det skal have en ret stor rotationshastighed, og helst ikke en sideværts bevægelse.

Ud fra energibevarelsen, kan man godt opstille en betingelse for den mindste vandrette rotationshastighed ægget skal have for at det rent energimæssigt vil være i stand til at rotere på højkant. Men så skal man først bestemme inertimomenterne for ægget for de to akser.

Vi antager at ægget er en omdrejningsellipsoide med halvaksler a og b .



Ellipsoidens rumfang kan udregnes ved integration, idet man deler den op i skiver, som vist på tegningen, hvor vi har indlagt et koordinatsystem i et snit gennem ellipsens centrum. Ellipsens ligning er i dette koordinatsystem.

$$(2.16) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vi indfører af praktiske grunde $x' = \frac{x}{a}$ og $y' = \frac{y}{b}$ så

ligningen bliver $x'^2 + y'^2 = 1$

Rumfanget af den viste skive med tykkelse dx er $dV = \pi y^2 dx$, så rumfanget bliver

$$(2.17) \quad V = \int_{-a}^a dV = \int_{-a}^a \pi y^2 dx = \pi b^2 a \int_{-1}^1 y'^2 dx'$$

$$V = \pi b^2 a \int_{-1}^1 (1 - x'^2) dx' = \left[x' - \frac{1}{3} x'^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \pi b^2 a$$

I overensstemmelse med at vi får kuglens rumfang $V_{kugle} = \frac{4}{3} \pi r^3$, når $a = b = r$.

Når vi skal bestemme inertimomentet af ellipsoiden med hensyn til storaksen, kan vi anvende den samme tegning som ovenfor, idet inertimomentet af en skive med masse dm og radius r er:

$$(2.18) \quad dI = \frac{1}{2} dm r^2$$

$$dI = \frac{1}{2} y^2 dm, \text{ og } dm = \rho dV = \rho \pi y^2 dx, \quad \text{hvor } \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi a b^2}$$

$$(2.19) \quad I_a = \int_{-a}^a dI = \int_{-a}^a \frac{1}{2} y^2 dm = \int_{-a}^a \frac{1}{2} y^2 \rho \pi y^2 dx$$

$$I_a = \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-a}^a y^4 dx = \frac{1}{2} \rho \pi b^4 a \int_{-1}^1 y'^4 dx'$$

$$I_a = \frac{1}{2} \rho \pi b^4 a \int_{-1}^1 (1 - x'^2)^2 dx' = \frac{1}{2} \rho \pi b^4 a \int_{-1}^1 (1 - 2x'^2 + x'^4) dx'$$

$$I_a = \frac{1}{2} \rho \pi b^4 a \left[x' - \frac{2}{3} x'^3 + \frac{1}{5} x'^5 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \rho \pi b^4 a \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \frac{1}{2} \rho \pi b^4 a \frac{16}{15}$$

$$I_a = \frac{1}{2} \frac{m}{\frac{4}{3} \pi a b^2} \pi b^4 a^{\frac{16}{15}}$$

$$I_a = \frac{2}{5} m b^2$$

Bemærk, at inertimomentet om a -aksen (storaksen) ikke afhænger af a , og at man får det korrekte inertimoment for en kugle, hvis $b = r$ (radius i kuglen).

Inertimomentet, af ellipsoiden når den roteres om b -aksen bliver tilsvarende $I_b = \frac{2}{5} m a^2$. Det er klart, inertimomentet omkring lilleaksen er større end inertimomentet omkring storaksen:

$$I_b = \frac{2}{5} m a^2 > I_a = \frac{2}{5} m b^2$$

Vi vil nu anvende energibevarelse til at finde sammenhængen mellem vinkelfrekvenserne, hvis ægget rejser sig fra en rotation om lilleaksen til en rotation om storaksen, og finde en betingelse på rotationsfrekvensen for at det overhovedet kan lade sig gøre.

Ser vi bort fra ændringen i den potentielle energi, som er $mg(a-b)$, så vil betingelsen være, under forudsætning af energibevarelse: $E_{rot} = \frac{1}{2} I_b \omega_b^2 = \frac{1}{2} I_a \omega_a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{2}{5} a^2 \omega_b^2 = \frac{1}{2} \frac{2}{5} b^2 \omega_a^2 \Leftrightarrow \omega_a = \frac{a}{b} \omega_b$

Vi opstiller derefter en energiligning, som både inkluderer rotationsenergien og den potentielle energi mgh .

$$mgb + \frac{1}{2} I_b \omega_b^2 = mga + \frac{1}{2} I_a \omega_a^2$$

$$mgb + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m a^2 \omega_b^2 = mga + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m b^2 \omega_a^2$$

$$(2.20) \quad 5gb + a^2 \omega_b^2 = 5ga + b^2 \omega_a^2$$

$$\omega_a^2 = \frac{5g(b-a)}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} \omega_b^2$$

Vi løser så uligheden:

$$\omega_a^2 > \omega_b^2 \Leftrightarrow \frac{5g(b-a)}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} \omega_b^2 > \omega_b^2$$

$$(2.21) \quad \omega_b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) > \frac{5g(a-b)}{b^2} \Leftrightarrow \omega_b^2 (a^2 - b^2) > 5g(a-b)$$

$$\omega_b^2 > \frac{5g}{a+b} \Rightarrow \omega_b > \sqrt{\frac{5g}{a+b}}$$

For det anvendte marmor æg er $a = 6,0 \text{ cm}$ og $b = 4,0 \text{ cm}$, og vi finder da den energimæssige betingelse for at ægget kan gå fra en vandret rotation til en lodret:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{5 \cdot 9,82}{0,10}} \text{ Hz} = 22,2 \text{ Hz} \quad \text{svarende til en frekvens } \nu = \frac{\omega_b}{2\pi} = 3,5 \text{ Hz}$$

Dette stemmer nogenlunde overens med, at ægget skal have en betydelig rotationshastighed før at det rejser sig på højkant.

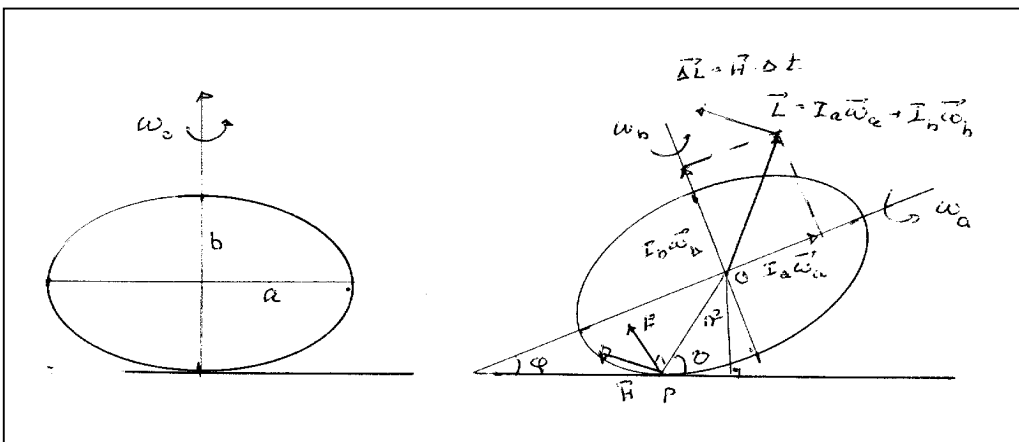
Den energimæssige betingelse for at ægget rejser sig på kant forklarer naturligvis ikke *hvorfor* ægget rejser sig på højkant.

For at ændre retningen af impulsmomentet, må ægget være påvirket af et kraftmoment, som kun kan hidrøre fra friktionskraften ved rotationen mod underlaget.

At forklare, hvorfor ægget rejser sig er langt fra simpelt, og en kvantitativ beregning er næppe mulig, og selv hvis det var muligt at opstille bevægelsesligninger, er det næppe muligt at løse dem.

Først kan vi se bort fra kraftmomentet fra tyngden. Det vil blot give anledning til en ujævn præcession, som det er tilfældet med enhver anden snurretop, som behandlet ovenfor.

Af figuren ses, at kraftmomentet fra tyngden er $H_T = mgr \cos \theta$. For en $a=4, b=3$ ellipse, varierer θ fra $90^\circ \rightarrow 74^\circ \rightarrow 90^\circ$. ($b < r < a$), så kraftmomentet fra tyngden er på intet tidspunkt særlig stort.



På figuren ovenfor er ægget vist i begyndelsestilstanden, hvor ægget er bragt i rotation.

Hvis ægget roterer, som vist på figuren til venstre, vil gnidningskraften kun bremse rotationen, men hvis ægget er vippet lidt, vil den vandrette gnidningskraft, der virker modsat rotationen med underlaget kunne give anledning til et kraftmoment som vist på tegningen, hvor \vec{F} er gnidningskraften. \vec{F} er vinkelret på \vec{r} og på papirets plan.

Ifølge teorien er gnidningskraften $F = \mu F_N$, hvor μ er gnidningskoefficienten mellem to plane stoffer, og F_N er normalkraften, altså den kraft, som virker vinkelret mellem de to flader. Ifølge teorien afhænger gnidningskraften F hverken af hastigheden eller størrelsen af kontaktfladerne. Idet ægget hviler i punktet P er $F = \mu mg$.

Udregner vi kraftmomentet fra \vec{F} med hensyn til massemidtpunktet O for ellipsen: $\vec{H} = \vec{r} \times \vec{F}$, er $H = \mu mgr$, og H danner en vinkel $90^\circ - \theta$ med vandret. Ægget roterer med vinkelhastighed $\vec{\omega}_a$ om storaksen og $\vec{\omega}_b$ om lilleaksen. Idet der for rotation om en akse gælder: $L = I\omega$, finder vi det øjeblikkelige impulsmoment: $\vec{L} = I_a \vec{\omega}_a + I_b \vec{\omega}_b$, som vist på tegningen.

I tidsrummet Δt giver kraftmomentet \vec{H} anledning til en tilvækst i impulsmoment $\Delta \vec{L} = \vec{H} \Delta t$. Ud fra tegningen kunne det godt se ud som om, at det vil føre impulsmomentvektoren over i en mere lodret stilling.

Kraftmomentet omkring O vil gå imod nul, når vi nærmer os den lodrette stilling.

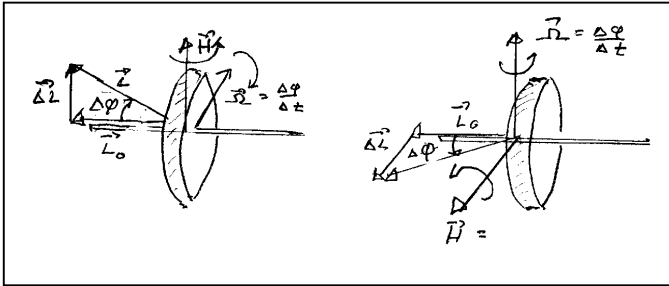
Nærmere kommer vi nok ikke på en forklaring på, årsagen til at ægget rejser sig på højkant.

En egentlig dynamisk beregning, vil være særdeles vanskelig.

3. Roterende hjuls fysik

Hvis man ikke har tyngdekraften at navigere med så kan man anvende et gyroskop. Hvis man som omtalt har en massiv roterende skive, der ikke er påvirket af kraftmomenter, så vil den bevare sin retning i verdensrummet, så længe rotationen fortsætter.

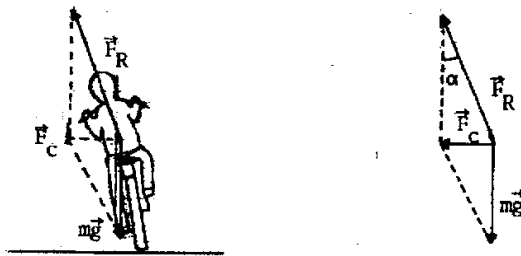
På mit gymnasium i slutningen af 70'erne havde vi et massivt let roterende hjul monteret på en stang. Sådant et findes også på Eksperimentarium.



Hvis man holder akse vandret og sætter hjulet i rotation, så vil de fleste finde det vanskeligt, at få den op i lodret position, fordi man naturligt vil forsøge at dreje det om en vandret akse. Se figur. Forsøget på at dreje om en vandret akse, vil give en tilvækst i impulsmomentet, så hjulet vil begynde en præcession om en lodret akse.

Hvis man derimod drejer hjulet om en lodret akse, og der skal stort set ingen kræfter til, så vil hjulet få en præcession om en vandret akse og rettes op.

Dette er også kendt fra cykelkørsel. Hvis man kører man god hastighed, skal man som bekendt ikke dreje på styret i et sving, men læne sig ud i svinget.



Eksemplet er hentet ud fra Elementær Fysik 2 side 34.

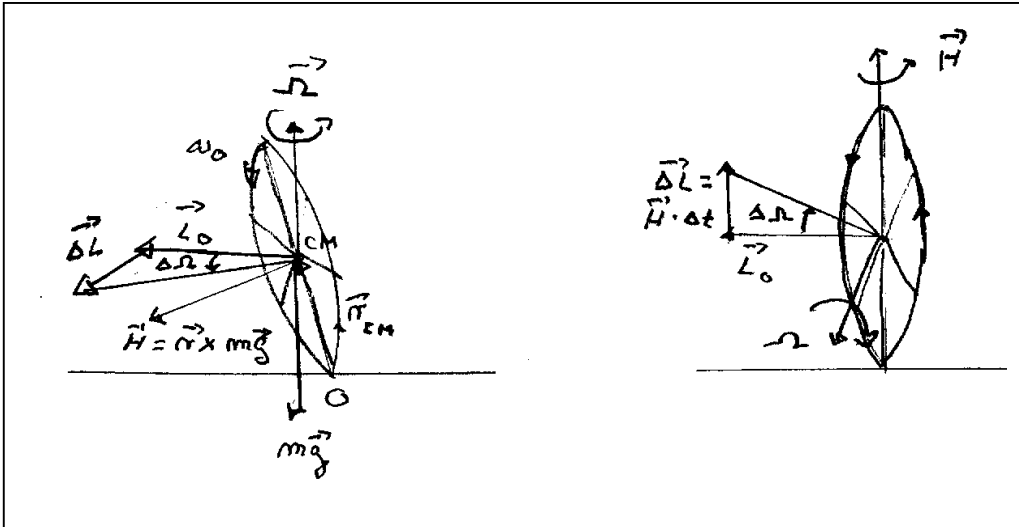
Figuren forestiller en cyklist i et sving. Cyklisten er påvirket af tyngden \vec{F}_T og en reaktionskraft fra underlaget \vec{F}_R . Gennemkøres svinget med konstant fart, udfører cyklisten en jævn cirkelbevægelse og resultanten af \vec{F}_T og \vec{F}_R leverer den til cirkelbevægelsen nødvendige centripetalkraft \vec{F}_C . Hvis α er den vinkel som cyklisten danner med lodlinien, og betegner r radius i cirkelbevægelsen, ses af figuren, at

$$(2.15) \quad \tan \alpha = \frac{F_c}{mg} = \frac{mv^2}{r} = \frac{v^2}{rg}$$

Vil vi f.eks. udregne hældningsvinklen i et sving med radius 10 m og hvor farten er $20 \text{ km/h} = 5,6 \text{ m/s}$, så finder man.

$$\tan \alpha = \frac{(5,6 \text{ m/s})^2}{10 \text{ m} \cdot 9,82 \text{ m/s}^2} = 0,314 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 17,4^\circ$$

Vi vil nu analysere sving med en cykel men ud fra teorien for rotation.



Når man kører har cykelhjulene et impulsmoment, hvis retning sammen med omløbsretningen af hjulet danner en højreskrue. Det er impulsmomentbevarelsen, der bevirker at det er let at holde balancen, når man kører i god fart på cyklen. (Det er derimod ikke let at holde balancen på en cykel, som står stille)

Hvis man læner sig lidt til siden, og dermed får et vandret kraftmoment $\vec{r}_{CM} \times \vec{F}_T$, vil det bevirke at cykelhjulet får en tilvækst i impulsmoment $\Delta \vec{L} = \vec{H} \Delta t$. Det betyder at impulsmomentet og dermed cykelhjulet vil dreje om en lodret akse, altså cyklen drejer til den samme side som man læner sig til. Dette er søgt illustreret (men det er ikke så let) på figuren ovenfor til venstre. På den måde korrigerer cyklen automatisk ved at dreje forhjulet, så man ikke vælter. Hvis cykelhjulets hældning med lodret er θ , gælder der som før:

$$(2.16) \quad \tan \Delta \varphi \approx \Delta \varphi = \frac{\Delta L}{L_{hjul}} = \frac{mgr \sin \theta \Delta t}{L_{hjul}} = \frac{mgr \Delta t}{I_{hjul} \omega_0}$$

Og hermed vinkelhastigheden i ”præcessionen”.

$$(2.17) \quad \Omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{mgr \sin \theta}{I_{hjul} \omega_0}$$

’Da vi antager at hele hjulets masse er samlet langs fælgen, finder vi for impulsmomentet.

$$(2.18) \quad L_{hjul} = I_{hjul} \omega_0 = I_{hjul} \frac{v_0}{r} = mr^2 \frac{v_0}{r} = mr v_0$$

Hvis R betegner radius i den cirkelbevægelse som cyklen udfører, så den lodrette vinkelhastighedsvektor Ω_{cirkel} som svarer til cirkelbevægelsen i vandret plan givet ved

$$(2.19) \quad \Omega = \Omega_{cirkel} \cos \theta$$

Fra den jævne cirkelbevægelse ved vi at $v = \omega r \Rightarrow v_0 = \Omega_{cirkel} R$ Indsættes i

$$\Omega = \frac{mgr \sin \theta}{I_{\text{hjul}} \omega_0}$$

finder man:

$$\Omega_{\text{cirkel}} \cos \theta = \frac{mgr \sin \theta}{I_{\text{hjul}} \omega_0} \Leftrightarrow \frac{v_0}{R} \cos \theta = \frac{mgr \sin \theta}{mr^2 \frac{v_0}{r}}$$

$$\tan \theta = \frac{v_0^2}{Rg}$$

Vi finder altså det samme udtryk, som da vi foretog analysen ud fra bestemmelse af den nødvendige centripetalkraft til cirkelbevægelsen.

Figuren til højre illustrerer et andet velkendt fænomen ved cykelkørsel.

Ingen, der har lært at køre på cykel begynder at dreje på styret, når de skal gennemkøre et sving med høj fart.

Og det er der en særdeles god grund til. For når man drejer på styret, påvirker man cyklen med et lodret kraftmoment, og $\Delta \vec{L} = \vec{H} \Delta t$ vil have den samme retning som \vec{H} . $\vec{L}_0 + \Delta \vec{L}$, vil være drejet opad i forhold til \vec{L}_0 og det vil få cyklen til at vælte til den modsatte side af svinget.

Forklaret mekanisk vil cyklen vælte udad på grund af ”centrifugalkraften”, som altså ikke er en egentlig kraft, men derimod manglen på den til cirkelbevægelse nødvendige centripetalkraft, som er fraværende, hvis man ikke læner sig ud i svinget. Dette er forsøgt illustreret på figuren ovenfor til højre.

Så selv om alle cyklister ved, hvordan man skal svinge med en cykel i høj fart, så er det ikke sikkert, at alle er i stand til at forklare hvorfor. Det har vi forsøgt at råde bod på her.