KAP. III GRAVITATIONSKRÆFTER

1. KEPLERS LOVE.

Siden oldtiden har der været to opfattelser af sammenhængen mellem jordens, solens og planeternes bevægelse.
I den geocentriske opfattelse er jorden centrum i universet, mens solen, planeterne og stjernerne bevæger sig i baner omkring jorden.
I den heliocentriske opfattelse er solen i hvile, mens det er jorden, der i lighed med de øvrige planeter bevæger sig omkring solen.
Den heliocentriske opfattelse tilskrives normalt Copernikus, en polsk astronom der levede (1473-1543).
Meget tidlige observationer har dog vist, at hvis den heliocentriske opfattelse er korrekt, bevæger planeternes sig ikke i jævne cirkelbevægelser omkring solen. Det er nemlig relativt nemt at konstatere mindre variationer i planeternes fart.
Det meste af middelalderen diskuterede man verdensopfattelsen på grundlag af teologiske og filosofiske overvejelser uden, at det førte til forøget indsigt.
Den danske astronom Tycho Brahe (1546-1601) havde en helt anden ide. Han foreslog nemlig, at striden om verdensopfattelserne måske bedst kunne afgøres, hvis man rådede over et tilstrækkeligt nøjagtigt observationsmateriale.(Af denne grund regnes Thyco Brahe med rette for grundlæggeren af den naturvidenskabelige metode, som er fysikkens grundlag).
I årtier indsamlede Thycho Brahe på øen Hven observationer af planeternes bevægelse af hidtil ukendt nøjagtighed. Efter en strid med den danske konge drog Tycho Brahe til Prag, hvor han overlod hele sit observationsmateriale til en af sine elever Johannes Kepler.
Kepler (1571-1630) troede (i modsætning til Thycho Brahe) på den heliocentriske verdensopfattelse, og han satte sig det mål, at finde de lovmæssigheder, der gjaldt for planeternes bevægelse.
Kepler gennemførte først sine beregninger ud fra en model, hvor planetbanerne var cirkler, men med solen lidt forskudt fra centrum.
Efter et beregningsarbejde, der strakte sig over flere år, måtte

han erkende, at observationerne ikke stemte overens med modellen. Kepler begyndte da forfra med beregningerne ud fra en antagelse om, at planetbanerne var ellipser med solen i det ene brændpunkt. Keplers beregningsarbejde strakte sig over 20 år og hører til de allerstørste bedrifter i fysikkens historie. Da han var færdig kunne han fremsætte sine berømte love for planeternes bevægelse.

1. lov: Alle planeterne bevæger sig i plane elliptiske baner med solen i det ene brændpunkt.

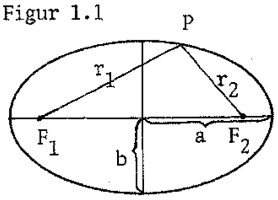
2. lov: Stedvektoren fra solen til en planet overstryger lige store arealer i lige store tidsrum. (Planeterne bevæger sig med <u>konstant arealhastighed</u>).

3. lov: Forholdet mellem 3. potens af a, (den halve storakse i ellipsebevægelsen) og 2. potens af T, (omløbstiden for planeten) er det samme for <u>alle</u> planeter.

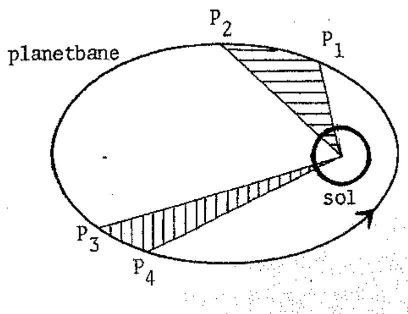
$$\frac{a^3}{T^2} = \text{konstant for alle planeter.}$$

En ellipse kan karakteriseres som en punktmængde, hvor afstandene til to givne punkter (kaldet brændpunkterne) har en given sum 2a. Ellipsens halve storakse kaldes for a, den halve lilleakse kaldes b.

Figur 1.1



$r_1 + r_2 = 2a$



Ellipsens <u>eccentricitet</u> e er et mål for dens "fladtrykning". e er defineret ved ligningen: $e^2 = 1 - a^2/b^2$. Man ser at ($0 \leq e < 1$)

Nåe ellipsens brændpunkter er sammenfaldende, reduceres ellipsen til en cirkel. I dette tilfælde er a = b og e = 0. En stor eccentricitet betyder derimod en stor afvigelse fra cirkelformen.

Figuren på side 42 illustrerer loven om arealhastighedens konstans. Er planeten det samme tidsrum om at bevæge sig fra P_1 til P_2 som fra P_3 til P_4, vil de to skraverede arealer ifølge Keplers 2. lov være lige store.

Ifølge Keplers 3. lov er a^3/T^2 den samme for alle planeter. I tabellen nedenfor er omløbstiden T, den halve storakse a og eccentriciteten e angivet for de 9 kendte planeter. De halve storakser er målt i enheden AE, den astronomiske enhed. 1 AE = a_{jord} lig med den halve storakse i jordens ellipsebevægelse om solen. Endvidere er i tabellen angivet vinklen i, som er den vinkel som planetens baneplan danner med jordens baneplan (ekliptika).

Tabel 1.2

Planet	a	T	e	i	a^3/T^2
Merkur	0,39 AE	0,24 år	0,21	7,0°	1,03
Venus	0,72	0,61	0,007	3,4°	1,00
Jorden	1,00	1,00	0,017	0,0°	1,00
Mars	1,52	1,88	0,093	1,9°	0,99
Jupiter	5,20	11,9	0,048	1,2°	0,99
Saturn	9,56	29,0	0,056	2,5°	1,04
Uranus	19,2	84,0	0,047	0,8°	1,00
Neptun	30,1	164	0,009	1,8°	1,01
Pluto	39,5	248	0,25	17,1°	1,00

2. NEWTONS GRAVITATIONSLOV.

Newton (1642-1727) blev bekendt med Keplers love, og han søgte den fysiske lovmæssighed, der var årsag til planeternes bevægelser. Det er Newton, der som den første indførte kraft-begrebet, som vi benytter det idag. Newton indså, at når planterne bevægede sig som observeret, måtte det være fordi de var påvirket af en kraft, der

var rettet mod solen. (Massetiltrækning = gravitationskraft).
Vi vil nu vise, hvorledes Newton ud fra Keplers love kunne slutte sig til de lovmæssigheder, der gælder for massetiltrækningen mellem solen og planeterne, d.v.s. afgøre hvorledes kraften afhænger af solen og planeternes masser samt afstanden mellem solen og planeterne. For ellipsebaner af planeterne er dette matematisk set en ret kompliceret ting. Vil vil derfor gennemføre argumentet under den simplificerede antagelse, at planeterne bevæger sig i jævne cirkelbevægelser med solen i centrum. Ved en jævn cirkelbevægelse er $a = r$ (radius i cirkelbevægelsen) og loven om arealhastighedens konstans er trivielt opfyldt. Af tabellen på side 43 fremgår iøvrigt, at de fleste planetbaner er meget nær cirkelbaner.

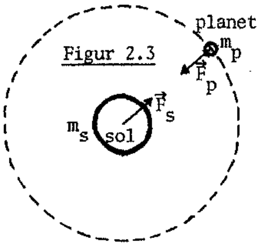
For en jævn cirkelbevægelse kan vi opskrive et udtryk for den centripetalkraft, som virker på planeten med massen m_p.

(2.1) $$F_p = m_p \omega^2 r = m_p \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

Anvender vi Keplers 3. lov: $a^3/T^2 = k \wedge a = r$ fås $\frac{1}{T^2} = \frac{k}{r^3}$.
Dette indsættes i udtrykket for F_p.

(2.2) $$F_p = m_p \frac{4\pi^2 k}{r^3} r = k_s \frac{m_p}{r^2} \qquad (k_s = 4\pi^2 k)$$

Vi har sat $k_s = 4\pi^2 k$, hvor k_s er en konstant, der (ifølge Keplers 3. lov) ikke afhænger af planeten, men godt kan afhænge af solen.



Figur 2.3

Ligningen (2.2) udtrykker at den kraft, hvormed solen trækker i en planet, er ligefrem proportional med planetens masse, og omvendt proportional med kvadratet på afstanden til planeten.
Ifølge Newtons 3. lov er den kraft F_s, hvormed planeten påvirker solen, lige så stor men modsat rettet F_p.
Kraften F_s må derfor også være omvendt

proportional r^2. Ifølge Newtons 2. lov for solen $F_s = m_s a_s$, må kraften F_s også nødvendigvis være proportional med solens masse m_s. Kraften F_s, hvormed planeten påvirker solen, må da kunne skrives på følgende form:

(2.4) $$F_s = k_p \frac{m_s}{r^2}$$ (k_p er en konstant, der kun kan afhænge af planeten)

Sammenholdes (2.2) og (2.4) med Newtons 3. lov $F_p = F_s$ får man.

(2.5) $$F_p = F_s \Leftrightarrow k_s \frac{m_p}{r^2} = k_p \frac{m_s}{r^2} \Leftrightarrow \frac{k_s}{m_s} = \frac{k_p}{m_p} = G$$

I det sidste udtryk er et forhold, der på den ene side kun afhænger af solen, og på den anden side kun afhænger af planeten. Dette forhold må derfor være uafhængigt af såvel solen som planeterne, og er følgelig en naturkonstant, som vi har betegnet med G.
Indsættes $k_s = G m_s$ i (2.2) finder man det søgte udtryk for kraftpåvirkningen mellem solen og planeterne.

(2.6) $$F_p = F_s = G \frac{m_s m_p}{r^2}$$

Newton gik nu et skridt videre, idet han antog, at massetiltrækningen (gravitationen) var et universielt fænomen, der ikke blot virkede mellem solen og planeterne men mellem alle legemer.
At det skulle være den samme naturlov, der "fik æblet til at falde mod jorden", og som holdt universet sammen, var på Newtons tid en uhyre dristig hypotese, men det illustrerer Newtons store format.

Newtons universelle gravitationslov:

To legemer med masserne m_1 og m_2, som er anbragt i afstanden r fra hinanden, påvirker gensidigt hinanden med en kraft, hvis størrelse er:

(2.7) $$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

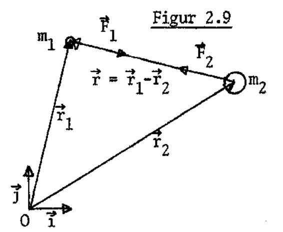
G er en universel naturkonstant, som kaldes gravitationskonstanten.

Kap III

(2.8) $G = 6{,}67\,10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$

Gravitationsloven er egentlig en vektorligning. (Sammenlign med Coulombs lov). Nedenfor er vist, hvorledes gravitationsloven kan skrives på vektorform.

Figur 2.9

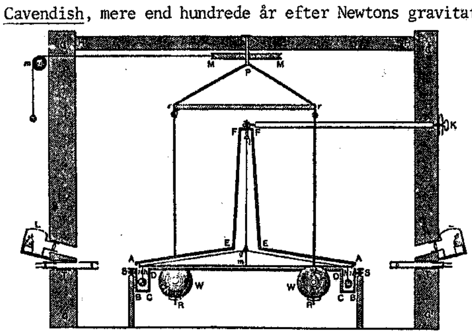


$\vec{F}_1$ er gravitationskraften, hvormed massen m_2 påvirker massen m_1. $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ er stedvektoren fra m_2 til m_1. $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}$ er en enhedsvektor med samme retning som $\vec{r}$.
Newtons gravitationslov bliver da,

(2.9) $$\vec{F}_1 = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{e}$$

Minustegnet i (2.9) fremkommer fordi, der er tale om en tiltrækningskraft. Massen m_2 er tilsvarende påvirket af en kraft $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

Gravitationskonstanten kan fortolkes som den kraft, som to 1 kg lodder gensidigt påvirker hinanden med, når de er anbragt i afstanden 1 meter. Da gravitationskraften således er helt ubetydelig for små masser, var det ikke muligt for Newton og hans samtidige at bestemme gravitationskonstanten ved laboratorieforsøg.
Gravitationskonstanten blev først eksperimentelt bestemt af englænderen Cavendish, mere end hundrede år efter Newtons gravitationslov.



Cavendish´ bestemmelse af G skete ved hjælp af en følsom snovægt. På figuren er vist en skitse af Cavendish´ oprindelige forsøg, men principielt anvender man stadig samme metode til bestemmelse af G. Snovægten består af en vægtstang med nogle små blylodder, der er ophængt i en tynd metaltråd.
Ligevægtsstillingen og trådens direktionsmoment kan bestemmes ved at sætte stangen i svingninger, (svingningstid flere minutter).
Som massetiltrækningslodder anvendte Cavendish et par kanonkugler støbt i bly. Anbringes blykuglerne på hver side af lodderne på stangen, vil ligevægtsstillingen forskydes på grund af massetiltrækningen fra blykuglerne. Den nye ligevægsstilling kan bestemmes ved et nyt svingningsforsøg. Når afstanden mellem de to ligevægtsstillinger er kendt, kan kraftpåvirkningen fra blykuglerne beregnes, når trådens direktionsmoment er kendt.
I en moderne version af apparatet foretages aflæsningen af vægtstangens bevægelse ved hjælp af en lysstråle, der reflekteres på et spejl anbragt på midten af vægtstangen. Lysplettens bevægelse kan da aflæses på en målestok flere meter borte.

3. EKSEMPLER PÅ ANVENDELSE AF GRAVITATIONSLOVEN.

3.1 Eksempel. Bestemmelse af jordens masse.

Ved formuleringen af gravitationsloven antog vi egentlig, at de to masser m_1 og m_2 var punktformige legemer. Ellers er afstanden r mellem dem ikke veldefineret. Hvis gravitationsloven skal anvendes til at finde den gravitationskraft, hvormed jorden påvirker et legeme nær jordens overflade, kan vi naturligvis ikke betragte jorden som et punktformigt legeme.
Newton beviste imidlertid, (og det var et af de mere vanskelige problemer at løse ved hjælp af den differential- og integralregning, han selv havde indført), at fra kugleformige legemer er gravitationskraften den samme, som hvis hele legemets masse var samlet i dets centrum.
Betragter vi den kraft, der virker på et "æble" med massen m, anbragt nær jordens overflade, ved vi fra faldforsøg, at denne kraft

er lig med tyngden $F_T = mg$. Ifølge Newtons gravitationslov, og ovennævnte bemærkning vedrørende gravitationskraften fra et kugleformigt legeme (i dette tilfælde jorden), gælder der således også, at

$$F_T = G\frac{mM}{R^2} \quad \text{, hvor } M \text{ er jordmassen og } R \text{ er jordradius.}$$

Heraf følger:

$$(3.1.2) \qquad mg = G\frac{mM}{R^2} \Leftrightarrow g = \frac{GM}{R^2} \Leftrightarrow M = \frac{gR^2}{G}$$

Indsættes $g = 9{,}82\,m/s^2$, $G = 6{,}67\,10^{-11}\,Nm^2/kg^2$ og $R = 6{,}37\,10^6\,m$ finder man $M = 5{,}98\,10^{24}\,kg$.

Når jordens masse er kendt, kan man udregne jordens gennemsnitlige massetæthed.

$$\rho_j = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \text{som udregnet giver} \quad \rho_j = 5{,}52\,g/cm^3$$

Gennemsnitsmassefylden for stoffer nær jordens overflade svarer til massefylden for grus som er $2{,}7\,g/cm^3$. Beregningen viser da, at der i jordens indre må befinde sig en større koncentration af tungere grundstoffer.

3.2 Eksempel Beregning af månens omløbstid

Vi skal antage at månen bevæger sig i en jævn cirkelbevægelse med jorden i centrum. Dette er med god tilnærmelse korrekt, idet månebanens eccentricitet kun er 0,055.

For at beregne omløbstiden, udtrykker vi at den centripetalkraft, der holder månen i sin bane, er lig med gravitationskraften fra jorden. Radius i månebanen er meget nær 60 R, hvor R = jordradius. M_m = månens masse, M_j = jordens masse og T_m = månens omløbstid.

$$F_c = F_G \Rightarrow M_m\left(\frac{2\pi}{T_m}\right)^2(60R) = G\frac{M_mM_j}{(60R)^2} \qquad \left(F_c = m\,\omega^2 r \text{ og } \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

Ifølge (3.1.2) er tyngdeaccelerationen ved jordens overflade $g = \frac{GM_j}{R^2}$. Indsættes dette på højre side af ligningen og bortforkortes M_m, finder man.

$$\left(\frac{2\pi}{T_m}\right)^2 60R = \frac{g}{3600} = g_m \Rightarrow T_m = 2\pi\sqrt{\frac{60R}{g_m}}$$

g_m er tyngdeaccelerationen (centripetalaccelerationen) på månens position. $g_m = 2,73\ 10^{-3}\ m/s^2$. Indsættes denne værdi sammen med jordradius $R = 6,37\ 10^6\ m$, finder man månens omløbstid $T_m = 2,35\ 10^6\ s$. Omregnet til døgn finder man $T_m = 27,2$ døgn. Denne værdi er i bedste overensstemmelse med månens faktiske omløbstid.
Det bemærkes, at vi i denne udregning af månens omløbstid ikke behøvede at kende gravitationskonstanten, men kun tyngdeaccelerationen g og jordradius R. Newton selv var derfor i stand til at forudsige månens omløbstid på grundlag af en sådan beregning, og overensstemmelsen var en triumf for hans gravitationslov.

3.3 Eksempel. Beregning af solens masse.
Beregningen er helt analog til beregningen af månens omløbstid.
Vi antager at jordens bevægelse om solen er en jævn cirkelbevægelse med omløbstid $T_j = 1,00$ år $= 3,15\ 10^7$ s. Radius i jordbanen a_j sættes lig med 1 AE $= 1,50\ 10^{11}$ m, som er jordens middelafstand fra solen.
Vi udtrykker da at den centripetalkraft, der holder jorden i en cirkelbane, leveres af gravitationskraften fra solen.

$$F_c = F_G \quad \Leftrightarrow \quad M_j\left(\frac{2\pi}{T_j}\right)^2 = G\,\frac{M_j M_s}{a_j^3}$$

Af denne ligning finder man ved bortforkortning af M_j,

$$(3.3.1) \qquad M_s = \frac{4\pi^2}{G}\,\frac{a_j^3}{T_j^2} \quad \text{som udregnes til} \quad M_s = 2,01\ 10^{30}\ kg.$$

3.4 Eksempel. Tyngden på månen.
Som bekendt er tyngdekraften på månen mindre end den er på jorden.
Vi vil nu beregne tyngdeaccelerationen g_m ved månens overflade, når det oplyses, at $M_{måne} = 0,0123\,M_{jord}$ og $R_{måne} = 0,27\,R_{jord}$.
Ved at sætte tyngdekraften lig med gravitationskraften finder man.

$$(3.4.1) \qquad mg_m = G\,\frac{mM_m}{R_m^2} \quad \Leftrightarrow \quad g_m = G\,\frac{M_m}{R_m^2} \quad \Leftrightarrow \quad g_m = G\,\frac{0,0123\,M_j}{(0,27\,R_j)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$(3.4.2) \qquad g_m = 0,169\,G\,\frac{M_j}{R_j^2} \quad \Leftrightarrow \quad g_m = 0,169\,g = 1,66\,m/s^2$$

Kap III

4. SATELLITBEVÆGELSER OM JORDEN.

Keplers love er i virkeligheden en konsekvens af Newtons gravitationslov og hans øvrige love for mekanikken. Da Newtons love er universelle, følger det, at også Keplers love gælder for ethvert system bestående af et massivt centrallegeme omgivet af en række langt mindre satellitter.

Siden 1957 har man opsendt satelitter fra jorden, d.v.s. bragt små legemer i kredsløb om jorden.

For disse satellitter gælder "Keplers love", hvilket betyder at satellitterne beskriver plane elliptiske baner med jordens centrum i det ene brændpunkt, at de bevæger sig med konstant arealhastighed, og at 3. potens af den halve storakse divideret med 2. potens af omløbstiden er den samme for alle satellitter. (Se side 42).

Ud fra Newtons gravitationslov på vektorform (2.9), kan man beregne en satellits accelerationsvektor $\vec{a} = (a_x, a_y)$ i punktet med stedvektoren $\vec{r} = (x,y)$. Indsætter man nemlig $m_1 = m$ (satellitmassen), $m_2 = M_j$ (jordmassen), anvender at $\vec{e} = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ og beregner accelerationen af Newtons 2. lov $\vec{F} = m\vec{a}$, finder man.

$$a_x = -G\frac{M_j}{r^3}x \quad \text{og} \quad a_y = -G\frac{M_j}{r^3}y \tag{4.1}$$

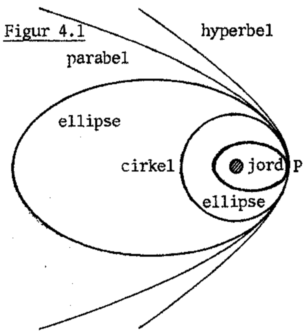
Koordinatsystemets begyndelsespunkt er sammenfaldende med jordens centrum, og $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ er afstanden fra jordcentret til satellitten.

Idet man erindrer, at $a_x(t) = x''(t)$ og $a_y(t) = y''(t)$, vil ligningerne (4.1) være to koblede differentialligninger, hvoraf man i princippet kan bestemme banekurven $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ for satellitten, når begyndelseshastighed og startposition er kendt, d.v.s. $\vec{r}(t_o) = (x_o, y_o)$ og $\vec{v}(t_o) = (v_{xo}, v_{yo})$ er opgivne for et givet t_o.

Ligningerne (4.1) kan løses analytisk, men vi råder ikke over det nødvendige matematiske apparat. I øvelsen om satellitbevægelse er vist, hvorledes ligningerne kan løses numerisk ved hjælp af et EDBanlæg. EDB-programmet, der også er anført, er en algoritme, der skridt for skridt beregner satellittens position ud fra den umiddelbart foregående position. I øvelsen er også vist en satellitbevægelse, der er et resultat af en sådan beregning.

Ligegyldigt hvorledes man løser ligningerne (4.1), vil man finde, at en satellit foruden ellipsebevægelsen kan udføre en hyperpelbevægelse eller en parabelbevægelse. I de to sidste tilfælde er bevægelsen ikke periodisk, men satelitten vil fortsætte ud i det uendelige fjerne. Opsendes satellitten fra jorden, vil banen i dette tilfælde være en del af en parabel- eller hyperbelgren med jorden i det ene brændpunkt.

Figur 4.1



På figuren er skitseret nogle satellitbaner, der alle går igennem det samme punkt. Hvilken af banerne satellitten vil vælge afhænger af dens energi, således at den mindste energi svarer til den inderste bane. Hvis satellittens hastighed i punktet P er nul, vil den falde frit mod jorden. Kurvernes rækkefølge vil da svare til en voksende tangentialhastighed af satelitten i punktet P.

For den inderste ellipsebane befinder jordcentret sig i det venstre brændpunkt. Som grænsetilfælde kan satellitten bevæge sig i en jævn cirkelbevægelse. Parabelbevægelsen udgør et grænsetilfælde mellem ellipse- og hyperbelbevægelsen.

Vi skal senere vise, at en satellits potentielle energi er givet ved udtrykket; $E_{pot}(r) = -G\frac{mM}{r}$ og dermed; $E_{mek} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$. Man kan da vise, at ellipse-, parabel-, og hyperbelbevægelsen svarer til, at $E_{mek} < 0$, $E_{mek} = 0$ og $E_{mek} > 0$.

4.2 Eksempel. Stationær kommunikationssatellit.

Til kommunikationsformål, f.eks. TV-transmissioner, har man ofte brug for en satellit, der ved ækvator befinder sig i en fast position over jordoverfladen. Kravet til satellitten er altså, at den skal udføre en jævn cirkelbevægelse med en omløbstid på 24 timer. Vi vil da bestemme hvor højt over jordoverfladen satellitten skal kredse.

Hastigheden v_c i den jævne cirkelbevægelse kan bestemmes ved at sætte centripetalkraften F_c lig med gravitationskraften F_G. (M = jordmasse, m = satellitmasse, r = baneradius og T = omløbstiden).

$$(4.2.1) \quad F_c = F_G \Rightarrow m\frac{v_c^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Benytter vi relationen $v_c = \omega r = \frac{2\pi}{T} r$, indsat i (4.2.1) finder man.

$$(4.2.2) \quad \frac{2\pi}{T} r = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} r^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}}$$

Indsættes $T = 24\,h = 8{,}64\ 10^4\ s$, $G = 6{,}67\ 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$, $M = 5{,}98\ 10^{24}\ kg$ finder man, $r = 42{,}3\ 10^6\ m$. Da jordradius $R = 6{,}37\ 10^6\ m$, ser man at satellitten skal befinde sig $35{,}9\ 10^6\ m = 35{,}9\ 10^3\ km$ over jordoverfladen.

Ved at indsætte i formlen (4.2.1) finder man at farten i cirkelbevægelser er $3{,}07\ 10^3\ m/s = 3{,}07\ km/s = 11{,}1\ 10^3\ km/h$.

4.3 Opgaver.

1) Nogle planeters masser kan bestemmes ved at studere deres måner. For planeten Jupiter iagttages, at en af dens måner har en omløbstid på 42½ h. Radius i månebanen bestemmes til $4{,}25\ 10^5\ km$.

a) Beregn på grundlag af disse oplysninger Jupiters masse.

2) En satellit bevæger sig i en jævn cirkelbevægelse 100 km over jordoverfladen. ($R_{jord} = 6{,}37\ 10^3\ km$).

a) Beregn satellittens omløbstid og fart i cirkelbevægelsen.

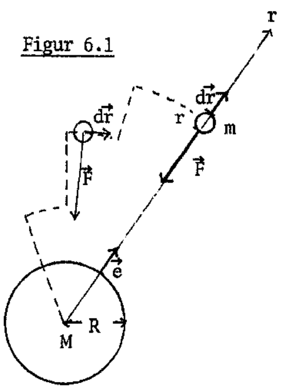
3) Angiv et udtryk for hvorledes tyngdeaccelerationen varierer med højden over jordoverfladen, og beregn med hvor mange procent at den er formindsket i højden 100 km.

Nedenfor følger nogle sider fra Kapitel VI i Elementær Fysik 2, hvor man udleder et udtryk for den potentielle energi i tyngdefeltet, samt beregner undvigelseshastigheden fra jorden.
Nu om dage, ville man kalde det universitetsniveau.

tivt kraftfelt forståes det arbejde, som feltkraften udfører, når legemet føres fra positionen til nulpunktet for potentiel energi.

6. DEN POTENTIELLE ENERGI I TYNGDEFELTET.

Figur 6.1



Ud fra definitionen (5.3) vil vi nu udregne den potentielle energi af et legeme med masse m, der befinder sig i afstanden r fra et centrallegme med massen M.
Det kan f.eks. være den potentielle energi af en satellit, der kredser i afstanden r fra jordens centrum.
Feltkraften $\vec{F}$ er ifølge Newtons gravitationslov Kap III side 46:

$$(6.2) \qquad \vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}$$

Vi vil ikke i detailler bevise, at et kraftfelt af denne form er konservativt, men blot bemærke, at en forskydning vinkelret på en radie ikke kan give noget bidrag til feltkraftens arbejde, da feltkraft og forskydning vil være ortogonale. Vi kan derfor nøjes med at udregne feltkraftens arbejde langs en radie.
Nulpunktet for potentiel energi vil vi vælge uendelig langt borte fra centrallegemet, d.v.s. for $r = \infty$.
Retningen af vektorerne $\vec{F}$, $\vec{e}$ og $d\vec{r}$ fremgår af figuren. Heraf fås ifølge (5.3):

$$(6.3) \qquad E_{pot}(r) = \int_r^\infty -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}\cdot d\vec{r} = -GMm\int_r^\infty \frac{1}{r^2}dr = -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty$$

Når man indsætter øvre grænse giver det nul. Hermed finder man:

$$(6.4) \qquad \boxed{E_{pot}(r) = -G\frac{Mm}{r}}$$

Udtrykket gælder, når r er større end radius R af centrallegemet.

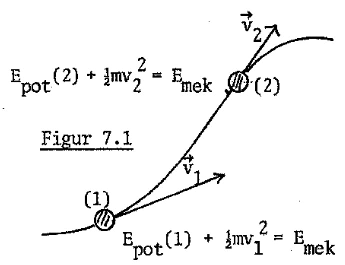
Kap VI

Udtrykket (6.4) ser umiddelbart ret forskelligt ud fra det kendte udtryk for potentiel energi i tyngdefeltet $E_{pot} = mgh$.
Udtrykket mgh er imidlertid udledt ud fra den antagelse, at feltkraften er konstant, og $E_{pot} = mgh$ er derfor en tilnærmelse, der kun gælder nær jordens overflade.
For at undersøge overensstemmelsen, udregner vi ud fra (6.4) den tilvækst i potentiel energi et legeme får, når det løftes stykket h over jordoverfladen. Jordradius sættes lig med R.

$$(6.5) \quad \Delta E_{pot} = E_{pot}(R+h) - E_{pot}(R) = -G\frac{Mm}{R+h} - (-G\frac{Mm}{R})$$
$$= -GMm(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}) = -GMm(\frac{-h}{(R+h)R}) \approx G\frac{Mm}{R^2}h$$

I den sidste tilnærmelse har vi sat $R+h \approx R$, som gælder, når $h \ll R$.
Vi har i kap III side 48 fundet at tyngdeaccelerationen $g = GM/R^2$
Indsættes dette i det sidste udtryk af (6.5), genfinder vi, at den potentielle energi nær jordoverfladen kan udtrykkes som: $\Delta E_{pot} = mgh$

7. ENERGIBEVARELSE I ET KONSERVATIVT KRAFTFELT.



Figur 7.1

Vi betragter nu det tilfælde, hvor et legeme med masse m bevæger sig frit i et konservativt kraftfelt, således at den resulterende kraft på legemet er lig med feltkraften.
Ved at sammenholde (4.5) $A_{res} = \Delta E_{kin}$ med (5.2) $A_{feltkraft} = -\Delta E_{pot}$ får man:

$$(7.2) \quad A_{res} = A_{feltkraft} \Leftrightarrow \Delta E_{kin} = -\Delta E_{pot} \Leftrightarrow \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0$$

Ligningen (7.2) udtrykker noget meget centralt. Vi ved nemlig, at når summen af tilvæksterne på den kinetiske og potentielle energi er nul, betyder at den mekaniske energi $E_{mek} = E_{kin} + E_{pot}$ er konstant.

Heraf følger den vigtige sætning:
I et konservativt kraftfelt er den mekaniske energi bevaret.
Indsætter man $\Delta E_{pot} = E_{pot}(2) - E_{pot}(1)$ og $\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$ i (7.2) og samler leddene med samme index på hver side af ligningen fås:

(7.3) $$\boxed{E_{pot}(2) + \tfrac{1}{2}mv_2^2 = E_{pot}(1) + \tfrac{1}{2}mv_1^2}$$

Summen af kinetisk og potentiel energi er den samme i positionerne (1) og (2). Dette er den sædvanlige måde at udtrykke energibevarelsen på.
Vi har allerede set flere eksempler på energibevarelse i et konservativt kraftfelt. F.eks. ved det skrå kast og ved den harmoniske svingning, hvor vi i begge tilfælde ved direkte udregning fandt, at summen af kinetisk og potentiel energi er konstant.
Typiske ikke konservative kræfter er gnidningskræfter. Hvis der optræder gnidningskræfter, må (7.2) modificeres derhen, at tilvæksten i mekanisk energi er lig med gnidningskræfternes arbejde.

(7.4) $$A_{gnidning} = \Delta E_{mek} = \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin}$$

8. ENERGIBEVARELSE I JORDENS TYNGDEFELET.

Ved en satellitbevægelse i jordens tyngdefelt gælder der energibevarelse, da jordens tyngdefelt er konservativt.
(Når det alligevel jævnligt sker, at der falder gamle satelitter og udbrændte rumstationer ned i hovedet på os, skyldes det at de systematisk, men næsten umærkeligt bremses i deres baner af den partikelstrøm, der er i verdensrummet).
Energibevarelsen for en satellit med masse m, der bevæger sig i afstanden r fra jordens centrum, kan udtrykkes:

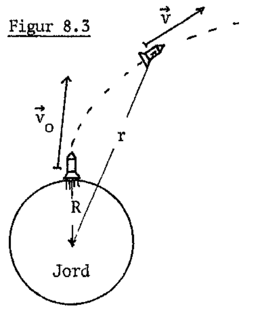
(8.1) $$E_{mek} = E_{kin} + E_{pot} = \tfrac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

Denne energibevarelse kan også anvendes til at beregne den hastighed, som et rumskib skal opsendes med for at undslippe jordens tyngdefelt. Opsendes et rumskib med begyndelseshastigheden v_o fra jordens overflade ($r = R$), er den mekaniske energi af rumskibet:

$$E_{mek} = \tfrac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{Mm}{R} \tag{8.2}$$

Denne energi er den samme under hele bevægelsen.

Figur 8.3



Vi vil da beregne den mindste hastighed, som rumskibet må have for at undslippe tyngdefeltet. Hertil bemærker vi, at et legeme der bevæger sig udenfor jordens tyngdefelt, (hvor $E_{pot}(r) = 0$, da $r \simeq \infty$), må have en positiv mekanisk energi, idet $E_{mek} = E_{kin}$. Da der gælder energibevarelse, må energien ved opsendelsen også være positiv for at rumskibet undslipper tyngdefeltet.

$$E_{mek} \geqq 0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{Mm}{R} \geqq 0 \Leftrightarrow v_o \geqq \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{8.4}$$

Indsætter man værdierne for gravitationskonstanten G, jordens masse M og jordradius R, finder man:

$$v_o \geqq \sqrt{\frac{2\; 6{,}67\; 10^{-11}\, 5{,}98\; 10^{24}}{6{,}37\; 10^{6}}}\ \text{m/s} = 11{,}2\; 10^{3}\ \text{m/s} = 11{,}2\ \text{km/s}$$

Rumskibet vil iøvrigt undslippe ligegyldigt om det opsendes lodret eller med anden vinkel med jordoverfladen.