Fysiske størrelser og enheder

Indhold

1. Fysiske størrelser og enheder 2
2. Måleusikkerhed og afvigelse 5
3. Scankopi af afsnittet om måleusikkerhed 7

Ole Witt-Hansen **1975 (2015)**

1. Fysiske størrelser og enheder

En fysisk størrelse er en størrelser, der kan måles. Når man skriver en fysisk størrelse, skal man altid angive en talværdi og en enhed.

F.eks. m = 82,5 kg, "m" (en masse) er den fysiske størrelse, "82,5" er talværdien og "kg" er enheden
De mest kendte eksempler på fysiske størrelser er:

Fysisk størrelse	SI-enhed	Andre anvendte enheder
Længde	m (meter)	*km, cm, lysår*
Masse	kg (kilogram)	g (gram), *mg*, *ton*
Tid	s (sekund)	h (timer), *min*, *år*
Areal	m^2 (kvadratmeter)	km^2, *hektar* = 100 *ar* = 10.000 m^2
Hastighed	m/s	km/h, cm/s
Acceleration	m/s^2	cm/s^2, $km/h\ s$
Kraft	N (Newton)	*kp* (kilopond), *dyn* (ældre)
Energi	J (Joule)	*cal, erg* (ældre)
Massefylde	kg/m^3	g/cm^3, ton/m^3
Tryk	Pa (Pascal) = N/m^2	*atm, mmHg, Bar*
Elektrisk strømstyrke	A (Ampere)	mA (miliampere)
Elektrisk ladning	C (Coulomb) = $A\ s$	mC, μC
Elektrisk spænding	V (Volt) = J/C	kV, MV (kilovolt, megavolt)
Temperatur	K (Kelvin)	^{0}C, (grader Celsius), F (Fahrenheit)

Vi benytter i fysikken, ifølge en vedtægt af nyere dato (1960), det såkaldte SI-enhedssystem (Det internationale system). Det har den fordel, at man i modsætning til tidligere, anvender det samme enhedssystem i hele verden til videnskabelig brug.
SI systemet har 5 grundenheder, som er enhederne for længde, masse, tid, strømstyrke og temperatur. Det er de understregne i skemaet.
Andre fysiske enheder, kan afledes af grundenhederne. F.eks. kan nævnes, at $N = kg\ m/s^2$, $J = kg\ m^2/s^2$.
Tidligere var enhederne *meter* og *kilogram* defineret ud fra normal-meteren, og normal-kilogrammet, som er opbevaret i Paris, mens enheden for tid var defineret som en vis brøkdel 1:(24·60·60) af et middelsoldøgn (i året 1900).
Nu om dage er disse enheder defineret ud fra atomare egenskaber, som gør enhederne universale og uforanderlige. Vi skal ikke her komme nærmere ind på de atomfysiske definitioner, men enheden for temperatur (Kelvin), vil blive indført i det følgende.

Man betegner altid en fysisk størrelse med et enkelt stort eller lille bogstav, eventuelt med et indeks. Eksempelvis kan man skrive:

l = 3,32 m (længde) ρ = 1136 kg/m^3 (massefylde) F = 200 N (kraft) t = 67,3 s (tid)

Anvendelse af 10'er potenser
10^n betyder som bekendt et 1-tal efterstillet af n nuller. F.eks. 10^4 = 10.000.

10^{-n} betyder $1/10^n$. F.eks. 10^{-3} = 1/1000, og 10^0 = 1.

Man anvender ofte potenser af 10 (positive som negative) til at angive en talværdi. Men når man gør det, så skal decimalkommaet altid (helst) stå efter det første ciffer, så tallet uden 10'er potens altid er et tal mellem 1 og mindre end 10. For eksempel:

$l = 2{,}39\ 10^5\ m\ = 239\ km$ $\qquad\qquad$ $t = 4{,}267\ 10^{-3}\ s = 4{,}267\ ms.$

Man kan naturligvis anvende andre enheder end SI-enheder. I sådanne tilfælde, er det imidlertid nødvendigt at medtage enhederne i udregningen og eventuelt, foretage omregning mellem enheder.

Fordelen ved at anvende SI-enheder er imidlertid den, at hvis man konsekvent reger i SI-enheder, så får man også svaret i SI-enheder, så her behøver man ikke at medtage enhederne i udregningerne.

Hvis et legeme med massen 1200 *kg*, bevæger sig med hastigheden 30 *m/s*, kan man udregne den kinetiske energi efter formlen: $E_{kin} = ½mv^2$. Da de indgåede størrelser er i SI-enheder, vil resultatet komme ud i enheden for energi, som er Joule. Så i stedet for at skrive

$E_{kin} = ½ \cdot 1200\ kg \cdot (30\ m/s)^2 = 5{,}4\ 10^5\ kg\ m^2/s^2 = 5{,}4\ 10^5\ J$ skriver man blot:

$E_{kin} = ½ \cdot 1200 \cdot 30^2 J = 5{,}4\ 10^5 J$

Endvidere anvendes ofte de såkaldte multipel-enheder. Anbringes f.eks. et *k* (præfikset) foran en enhed, betyder det at enheden skal ganges med 1000. *k* læses kilo-. F.eks. *km* (kilometer), *kg* (kilogram), *kV* (kilovolt). Nedenfor er angivet de mest almindelige præfikser, og deres betydning:

Præfiks	enhed ganges med	læses	eksempel
d	10	deka-	*da* (dekaliter)
h	10^2	hekto-	*hl* (hektoliter)
k	10^3	kilo-	*kW* (kilovolt)
M	10^6	Mega-	*Mm* (megameter)
G	10^9	Giga-	*GJ* (gigajoule)
d	10^{-1}	deci-	*dg* (decigram)
c	10^{-2}	centi-	*cm* (centimetre)
m	10^{-3}	mili-	*mV* (milivolt)
μ	10^{-6}	mikro-	*μs* (mikrosekund)
n	10^{-9}	nanno-	*nm* (nannometer)
p	10^{-12}	pico-	*pF* (picofarad)

Omregning mellem enheder

Ofte får man brug for at omregne fra en enhed til en anden. Det er i princippet simpelt, men det kræver, at man kan anvende potensregnereglerne. Vi viser metoden med et par eksempler.

1.1 Eksempel:

Omregning fra *km/h* til *m/s*.

Det gøres ved at skrive, hvor mange meter en kilometer er og hvor mange sekunder en time er.

$$60\ km/h = 60 \frac{10^3 m}{3600\ s} = \frac{60\ m}{3{,}6\ s} = 16{,}7\ m/s$$

Omregning af massefylde fra g/cm^3 til kg/m^3. Dette gøres ved at skrive hvor mange kilogram et gram er og hvor mange kubikmeter en kubikcentimeter er.

$$\rho_{Pb} = 11{,}3\ g/cm^3 \ = \ 11{,}3\frac{10^{-3}\ kg}{10^{-6}\ m^3} \ \Rightarrow \ \rho_{Pb} = 11{,}3\,10^3\ kg/m^3$$

Nøjagtighed af en måling. Antallet af cifre i et resultat.
Enhver fysisk størrelse kan kun bestemmes med en vis nøjagtighed afhængig af måleinstrumentets beskaffenhed.
Af den grund, er det antallet af (betydende) cifre, der er afgørende, når man skal angive værdien af en målt fysisk størrelse, og ikke antallet af decimaler (som det ofte er tilfældet i regning og matematik).

Et betydende ciffer er ethvert ciffer (også nul), som ikke er et foranstillet nul.

F.eks. 327 *m* (3 betydende cifre), 9,316 10^{-3} *V* (4 betydende cifre) , 0,0031 *N* (2 betydende cifre), 31,000 (5 betydende cifre).
Massen af en elektron er 0,000000000000000000000000000000911 *kg* (3 betydende cifre).
Dette vil man dog altid (af indlysende grunde) skrive: 9,11 10^{-31} *kg*. (3 betydende cifre).

Når man angiver en talværdi med en 10'er potens, er der en (dybt fornuftig) tradition, at kommaet skal stå på principalpladsen, dvs. på pladsen efter det første betydende ciffer læst fra venstre.

Man skriver derfor 4,23 10^4 *J*, men ikke 42,3 10^3 *J* eller 423 10^2 *J*. (Selv de to sidstnævnte tal naturligvis ikke er forkerte). Årsagen er at 10'er potensen angiver størrelsesordenen af tallet i forhold til et tal mellem 1 og 10.
Alternativt kan man anvende præfikser, hvor kommaet ikke står på principalplads. F.eks. 42,3 *KJ*.
Hvad man foretrækker, er en smagssag, dog er 10'er potenser, mere hensigtsmæssige i beregningsudtryk..

Som omtalt, er antallet af betydende cifre afgørende, når man skriver en fysisk størrelse.
Når man f.eks. angiver en fysisk størrelse l = 3,32 *m*, så er det i matematikken det samme som at skrive: l = 3,320 *m*, men ikke i fysikken, fordi antallet af betydende cifre er forskelligt i de to resultater, hvilket igen betyder at den nøjagtighed, hvormed målingen er foretaget er forskellig.

Hvis måleusikkerheden (nøjagtigheden) ikke er angivet eksplicit, betyder resultatet l = 3,32 *m*, at den målte størrelse ligger i intervallet [3,315 *m*; 3,325 *m*[,(altså større end 3,315 *m* og mindre end 3,325 *m*). For angivelsen l = 3,320 *m*, betyder det derimod, at den målte størrelse ligger i intervallet] 3,3195 *m* ; 3, 3205 *m*].

Hvis måleusikkerheden er kendt, f.eks. 2 *mm*, kan man specificere den direkte på følgende måde:
l = 3,320 *m* $\pm$ 0,002 *m*, hvilket altså betyder, at den målte størrelse ligger mellem værdierne l = 3,318 *m* og l = 3,322 *m*.

Hvis man ikke direkte angiver måleusikkerheden, men kun antallet af betydende cifre, er betydningen af et resultat: f.eks. *m* = 0,325 *kg* = 325 *mg* (samme antal betydende cifre, lig med samme nøjagtighed, men et forskelligt antal decimaler) den, at disse 3 cifre stadig vil være korrekte,

hvis der foretages en mere nøjagtig måling på en mere følsom vægt. $m = 0,325\ kg$ er ensbetydende med at skrive: $m = 0,325\ kg \pm 0,0005\ kg$.
En mere nøjagtig måling kan derfor godt give resultaterne $m = 0,3253\ kg$ eller $m = 0,3248\ kg$, men ikke (hvis målingerne er korrekt udførte) $m = 0,3256\ kg$ eller $m = 0,3243\ kg$.

Når man laver forsøg (fysiske øvelser) er det væsentligt, at man angiver det korrekte antal betydende cifre i sine måleresultater, fordi det er en del af udførelsen af et forsøg, at man, af resultatet skal kunne vurdere den nøjagtighed, hvormed målingerne er foretaget.

2. Måleusikkerhed og afvigelse

Lad os antage, at vi har målt en fysisk størrelse, f.eks. $a = 3,38\ m$. Usikkerheden på målingen kan f.eks. angives som $\Delta a = 0,02\ m$. Δa kaldes den absolutte usikkerhed på a.
Symbolet Δ anvendes her i en lidt anden betydning end det sædvanlige "en tilvækst" .
Som nævnt ovenfor, skriver man da sædvanligvis: $a = 3,38\ m \pm 0,02\ m$. hvilket helt præcist betyder, at a befinder sig i intervallet $[a - \Delta a\ ,\ a + \Delta a] = [3,36\ m; 3,40\ m]$.

For at kunne sammenligne nøjagtigheden på målinger af forskellige størrelser, anvender man stort set aldrig den absolutte måleusikkerhed, men derimod den relative usikkerhed som er det samme som måleusikkerheden i procent.

Den relative usikkerhed på målingen a er defineret ved: $\frac{\Delta a}{a}$, hvor Δa er den absolutte usikkerhed.

Den relative usikkerhed angives ofte i procent idet $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a}{a} 100\%$, (idet 1% = 1/100).

I det valgte eksempel ovenfor finder man således: $\frac{\Delta a}{a} = \frac{0,02}{3,38} = 0,0054 = 0,54\%$

Man har den tradition at runde heltallige procenter op til nærmeste hele tal, og hvis procenten er et decimaltal, kun at angive én decimal. Man angiver i hvert fald aldrig en procent, som er større end 1 med mere end én decimal, og man angiver aldrig en procent, som er mindre end én med mere end to cifre.

Måleusikkerhed, målefejl og Systematiske fejl.
Ovenfor er omtalt betydningen af måleusikkerhed, men det er langtfra den eneste grund til, at et resultat kan afvige fra det forventede. Uden indsigt i regneregler for måleusikkerheder, vil man måske konkludere at en afvigelse skyldes fejlmålinger eller defekt apparatur, hvilket selvfølgelig kan være tilfældet.
I de tilfælde, hvor målepunkter bliver tegnet ind på mm-papir eller log-papir, (altså før dette blev overladt til matematik-computere), blev en målefejl som regel opdaget ved, at et punkt lå en del udenfor den rette linie, som de øvrige punkter fulgte. (Men det sker naturligvis ikke, når linierne tegnes elektronisk).
Den tredje type fejl, der giver anledning til afvigelser kaldes systematiske fejl. Det kan være et system, som antages at være gnidningsfrit (men som aldrig er det helt), eller et system, som man antager er varmeisoleret, (men som ikke er det helt). Sådanne "systematiske fejl", kan man i reglen ikke gøre noget ved. Kun kan man undersøge om måleresultaterne er i overensstemmelse med, at der har været gnidning eller varmetab. Afvigelsen skal være til den "rigtige side"

Resten af dette kapitel beskæftiger sig med regning med usikkerheder. Dette har ikke været relevant siden 1988, så det er ikke overført manuelt til elektronisk form.

Det skyldes også, at de fleste målinger nu om dage (siden 2010) er foretaget med elektronisk apparatur, hvor man ikke kan vurdere måleusikkerheden eller, hvor den er så lille, at den er uden betydning i forhold til de systematiske fejl
Tidligere skulle eleverne vurdere måleusikkerhederne på de målte størrelser, og ved hjælp af formlerne for usikkerhederne beregne den relative usikkerhed på resultatet. Dette kunne så enten sammenlignes med en tabelværdi, hvorvidt afvigelsen fra tabelværdien var indenfor måleusikkerheden, og dermed om øvelsen var ordentligt udført.
Eller ved gentagne målinger af samme størrelse, kunne man undersøge om usikkerhedsintervallerne havde en fællesmængde, så der fandtes en værdi, som kunne være resultatet fra alle målinger, og dermed, at målingerne var ordentligt udført

3. Scankopi af afsnittet om måleusikkerhed

Kap I

men ikke,- hvis antallet af betydende cifre er korrekt angivet-, m = 0,3256 kg eller m = 0,3242 kg.
Ved de fysiske øvelser er det væsentligt, at man angiver det korrekte antal betydende cifre i sine resultater, fordi det er et led i udførelsen af et forsøg, at man kan vurdere den nøjagtighed, hvormed målingerne er foretaget. Hvorledes man bestemmer usikkerheden på et måleresultat hidrørende fra flere forskellige målinger skal vi se på i næste afsnit.

2. MÅLEUSIKKERHED

Lad os antage, at vi har målt en fysisk størrelse, f.eks. a = 3,38 m. Usikkerheden på målingen kan da angives som Δa = 0,02 m. Δa betegnes som den absolutte usikkerhed på a. Vi bemærker, at symbolet anvendes i en lidt anden betydning end det sædvanlige tilvækst (delta). Som nævnt, skriver man da sædvanligvis: a = 3,38 $\pm$ 0,02 m , hvilket helt præcist betyder, at den målte størrelse ligger i intervallet $[a-\Delta a, a+\Delta a]$ = [3,36 m;3,40 m] .
For at kunne sammenligne måleusikkerheden fra forskellige målinger, angiver man i stedet for den absolutte usikkerhed ofte den relative usikkerhed, som er lig med måleusikkerheden i procent af resultatet.
Den relative usikkerhed på størrelsen a er defineret som $\frac{\Delta a}{a}$.
Oftest angives den relative usikkerhed i procent, idet $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a}{a} 100\%$
I det valgte eksempel finder man således: $\frac{\Delta a}{a} = \frac{0,02}{3,68} = 0,0054 = 0,54\%$.
Normalt afrunder man procenter. 5,38% vil man f.eks. betegne 5% usikkerhed, 13,67% betegnes 14% usikkerhed.
Indgår der flere målte størrelser i en formel, vil vi nu med nogle eksempler vise, hvorledes man bestemmer usikkerheden på resultatet ud fra måleusikkerheden på de enkelte størrelser.

2.1 Eksempel

Skal man måle svingningstiden for et pendul, kan det gøres ved at måle tiden T for en svingning på et stopur. Usikkerheden ved denne måling er ΔT = 0,2 s (Med lidt træning har man en usikkerhed på 0,1 s ved start og stop). Er svingningstiden nu målt til T = 1,3 s

4

er den relative usikkerhed følgelig, $\frac{\Delta T}{T} = \frac{0,2}{1,3} = 0,15 = 15\ \%$.
Da 15 % er en meget stor usikkerhed, vil man for at formindske denne i stedet bestemme tiden for 10 svingninger t_{10} *. Den absolutte usikkerhed på* t_{10} *er den samme som på T, nemlig* $\Delta t_{10} = 0,2\ s$ *. Lad os antage at man finder* $t_{10} = 12,3\ s$*, hvoraf man slutter at* $T = 1,23\ s$*.*
Den relative usikkerhed på t_{10} *er nu* $\frac{0,2}{12,3} = 0,016 = 1,6\ \%$*. Pointen er da, at den relative usikkerhed på T er den samme som på* t_{10} *nemlig 1,6 %. Dette følger af at* $T = \frac{1}{10}t_{10} \Rightarrow \Delta T = \frac{1}{10}\Delta t_{10}$*, således at forholdet* $\frac{\Delta T}{T}$ *er det samme som forholdet* $\frac{\Delta t_{10}}{t_{10}}$ *. Hvad vi her har illustreret med et eksempel kan generelt formuleres.*

2.2 Sætning

Hvis en fysisk størrelse X multipliceres med et tal c bliver den absolutte usikkerhed c gange så stor, mens den relative usikkerhed er uforandret.

$$\Delta(cX) = c\Delta X \qquad \text{og} \qquad \frac{\Delta(cX)}{cX} = \frac{\Delta X}{X}$$

2.3 Eksempel

Ofte anvender man et manometer til trykmåling, og trykket P bestemmes da som barometerstand B plus en højdeforskel $h = h_2 - h_1$ *.*
$P = B + h_2 - h_1$*. Både ved bestemmelse af B samt* h_1 *og* h_2 *er der en*

Kap I

$$\Delta(X + Y) = \Delta X + \Delta Y \quad \text{og} \quad \Delta(X - Y) = \Delta X + \Delta Y$$

$$\frac{\Delta(X + Y)}{X + Y} = \frac{\Delta X + \Delta Y}{X + Y} \quad \text{og} \quad \frac{\Delta(X - Y)}{X - Y} = \frac{\Delta X + \Delta Y}{X - Y}$$

2.5 Eksempel

For en indespærret gas, gælder Boyle-Mariottes lov, at produktet af tryk og rumfang er konstant, $PV = k$. Loven efterprøves, ved at måle samhørende værdier af tryk P og rumfang V. Normalt vil man ikke finde, at PV er helt konstant på grund af måleusikkerheden. For at undersøge om afvigelsen kan skyldes måleusikkerhed, er det nødvendigt, at kunne beregne usikkerheden på produktet af P og V, $\Delta(PV)$ ud fra usikkerhederne ΔP og ΔV. Vi vil nu vise, hvorledes dette gøres.

For en given måling ligger de sande værdier for P og V i intervallerne $[P-\Delta P, P+\Delta P]$ og $[V-\Delta V, V+\Delta V]$, for produktet PV må da gælde, at den sande værdi ligger i intervallet $[(P-\Delta P)(V-\Delta V),\ (P+\Delta P)(V+\Delta V)] =$ $[PV-P\Delta V-V\Delta P+\Delta P\Delta V,\ PV+P\Delta V+V\Delta P+\Delta P\Delta V] \approx [PV-(P\Delta V+V\Delta P),\ PV+(P\Delta V+V\Delta P)]$

Ved den sidste omskrivning, har vi bortkastet leddet $\Delta P\Delta V$, da dette led er lille i forhold til de øvrige. Hvis usikkerhederne ΔP og ΔV ikke er små i forhold til P og V, er målingerne jo helt meningsløse. Sammenlignes det sidste interval med usikkerhedsintervallet for PV, $[PV-\Delta(PV),\ PV+\Delta(PV)]$ ser man, at der må gælde: $\Delta(PV) = P\Delta V+V\Delta P$.

den tilbagelagte vej s i et givet tidsrum t. v beregnes da som $v = \frac{s}{t}$
Ud fra kendskab til usikkerhederne Δs *og* Δt *på s og t, vil vi søge et udtryk for usikkerheden på v. Metoden er den samme, som i de forrige eksempler, men regningerne lidt mere indviklede.*
Den sande værdi for s og t må ligge i intervallerne $[s-\Delta s, s+\Delta s]$ *og* $[t-\Delta t, t+\Delta t]$ *. Heraf følger, at den sande værdi for* $v = \frac{s}{t}$ *må ligge i intervallet* $[\frac{s-\Delta s}{t+\Delta t}, \frac{s+\Delta s}{t-\Delta t}]$ *, hvor de to endepunkter er fundet ved at dividere den største værdi for t op i den mindste værdi for s, og at dividere den mindste værdi for t op i den største værdi for s.*
Det anførte interval vil vi da forsøge at skrive på formen $[v-\Delta v, v+\Delta v]$ *lig med* $[\frac{s}{t} - \Delta(\frac{s}{t}), \frac{s}{t} + \Delta(\frac{s}{t})]$ *. Sammenlignes de to intervaller, fremgår det, at usikkerheden på* $\frac{s}{t}$ *skal beregnes på følgende to måder:*

$$\Delta(\frac{s}{t}) = \frac{s}{t} - \frac{s-\Delta s}{t+\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-(s-\Delta s)t}{t(t+\Delta t)} = \frac{s\Delta t+t\Delta s}{t(t+\Delta t)} \approx \frac{s\Delta t + t\Delta s}{t^2}$$

$$\Delta(\frac{s}{t}) = \frac{s+\Delta s}{t-\Delta t} - \frac{s}{t} = \frac{(s+\Delta s)t-(t-\Delta t)s}{t(t-\Delta t)} = \frac{\Delta st+\Delta ts}{t(t-\Delta t)} \approx \frac{s\Delta t + t\Delta s}{t^2}$$

For at opnå det sidste tilnærmede udtryk, har vi i begge tilfælde benyttet, at Δt *er lille i forhold til t, således at* Δt *i nævneren bortkastes. Vi ser at vi med tilnærmelse opnår det samme udtryk for den absolutte usikkerhed på* $\frac{s}{t}$ *. Formlerne bliver lette at fortolke, når vi udregner den relative usikkerhed på* $\frac{s}{t}$ *. Her skal vi dividere med* $\frac{s}{t}$ *, hvilket er det samme, som at gange med* $\frac{t}{s}$ *. På denne måde finder vi*

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{t}{s}(\frac{s\Delta t + t\Delta s}{t^2}) = \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta s}{s}$$

Som ved produktet finder vi, at den relative usikkerhed på en kvotient udregnes som summen af de relative usikkerheder på tæller og nævner.

2.8 Sætning

Den relative usikkerhed på en kvotient af to fysiske størrelser udregnes som summen af de relative usikkerheder på tæller og nævner.

$$\Delta(\frac{X}{Y}) = \frac{X\Delta Y + Y\Delta X}{Y^2} \quad \text{og} \quad \frac{\Delta(\frac{X}{Y})}{\frac{X}{Y}} = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}$$