

Eksempler på Fysikkens Differentialligninger

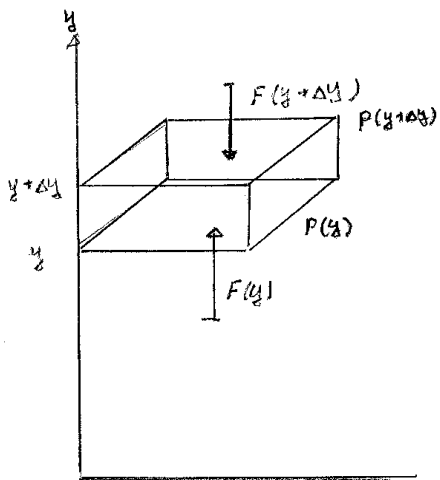
Ole Witt-Hansen

Køge Gymnasium 2008

Indhold

1. Trykkets afhængighed af højden over jordoverfladen	3
2. Radioaktive henfaldskæder	4
3. Retlinet bevægelse af en partikel i væsker og gasser	7
3.1 kugleformet legeme som synker i en væske	7
3.2 Lodret turbulent bevægelse i væsker og gasser	9
3.2.1 Opadgående bevægelse:	10
3.2.2 Nedadgående bevægelse:	11
3.2.3 Lodret bevægelse i luft.....	12
4. Det Skrå kast	14
4.1 Skråt kast uden luftmodstand.....	14
4.2 Skråt kast med luftmodstand.....	15
5. Dæmpet harmonisk svingning	17
5.1 Løsning af differentiallygningen ved hjælp af komplekse tal	18
5.2 Traditionel løsning af differentiallygningen	19
6. Tvungen harmonisk svingning uden dæmpning	22
7. Differentiallygninger, der ikke kan løses analytisk	25
7.1 Taylors formel.....	25
7.2 Numerisk løsning af 1. ordens differentiallygninger	26

1. Trykkets afhængighed af højden over jordoverfladen



Vi betragter et kasseformet udsnit af atmosfæren.

Arealet af endefladerne betegnes A . Kassen befinder sig i højden y over jordoverfladen.

Kassen har højden Δy . Trykket på overside og underside betegnes $p(y + \Delta y)$ og $p(y)$. Massefylden for luften i højden y betegnes $\rho(y)$.

Vi minder om at kraften på en flade med areal A er $F = pA$, hvor p er trykket på fladen.

Vi udtrykker nu, at forskellen i kraften på underside og overside er lig med tyngden af den luft, der befinder sig i kassen. Dette fordi luften i kassen er i hvile.

$$p(y)A - p(y + \Delta y)A = m_{air}g = \rho(y)V_{air}g = \rho(y)A\Delta yg$$

Så der gælder

$$p(y)A - p(y + \Delta y)A = \rho(y)A\Delta yg$$

Divideres med $A\Delta y$ fås:

$$\frac{p(y + \Delta y) - p(y)}{\Delta y} = -\rho(y)g$$

og erstattes

$$\frac{p(y + \Delta y) - p(y)}{\Delta y} \text{ med } \frac{dp}{dy} \text{ får man:}$$

$$(1.1) \quad \frac{dp}{dy} = -\rho(y)g$$

For at løse differentiaalligningen (1.1), må vi imidlertid kende endnu en sammenhæng mellem $\rho(y)$ og $p(y)$. Den kan vi imidlertid få af:

1. Tilstandsligningen for ideale gasser: $PV = nRT$
2. Definition af molmasse M : $m = nM \Leftrightarrow n = \frac{m}{M}$, hvor n er antal mol, samt
3. Definition af massefylde: $\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho V$

Indsættes nemlig de to sidste ligninger i tilstandsligningen finder man:

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT = \frac{\rho V}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{M}{RT}P$$

Dette udtryk for massefylden indsættes så i (1.1), som herefter giver:

$$(1.2) \quad \frac{dp}{dy} = -\frac{Mg}{RT} p$$

Som bekendt aftager temperaturen ca. med 1°C for hver 200 m, man kommer til vejrs, men vi antager først, at temperaturen er konstant op igennem atmosfæren.

Løsningen til differentilligningen (1.2) er kendt, så vi finder:

$$(1.3) \quad p(y) = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}y}$$

Indsættes værdier for konstanterne: $M = 29 \text{ g/mol}$, $g = 9.82 \text{ m/s}^2$, $R = 8.31 \text{ J/(molK)}$ og $T = 273 \text{ K}$, finder man:

$$(1.4) \quad p(y) = p_0 e^{-1.2610^{-4}y}$$

Hvor y skal måles i meter. Dette giver et trykfald på 1,3% pr. 100 m og 12% pr. 1000 m.

Vi ser dernæst på løsningen til differentilligningen, hvis temperaturen antages at aftage lineært med 1°C , pr. 200 m. Temperaturen ved jordoverfladen sættes til $20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$.

Temperaturen i højden y er derfor: $T = T(y) = 293 - y/200$. Differentilligningen bliver herefter:

$$(1.5) \quad \frac{dp}{dy} = -\frac{Mg}{R(293 - \frac{y}{200})} p$$

Denne ligning løses på sædvanlig vis ved separation og integration:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R} \int_0^y \frac{1}{293 - \frac{y}{200}} dy \quad \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{293R} \int_0^y \frac{1}{1 - \beta y} dy \quad \text{med} \quad \beta = \frac{1}{293 \cdot 200}$$

Ligningen integreres til at give:

$$(1.6) \quad \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{Mg}{293R\beta} \ln(1 - \beta y) \quad \Rightarrow \quad p = p_0 (1 - \beta y)^{\frac{Mg}{293R\beta}}$$

Udregnes trykket efter (1.6) giver det kun anledning til afvigelser fra (1.4) på 0,1 – 0,2 %.

2. Radioaktive henfaldskæder

Differentilligningen for antallet af radioaktive kerner er kendt fra undervisningen:

$$(2.1) \quad \frac{dN}{dt} = -kN$$

Som har løsningen

$$(2.2) \quad N(t) = N_0 e^{-kt}$$

Aktiviteten er defineret som antal sønderdelinger pr. sekund

$$(2.3) \quad A(t) = -\frac{dN}{dt} = kN(t)$$

hvor k som sædvanlig betegner henfaldskonstanten (sønderdelingskonstanten). Henfaldskonstanten k er lig med $\ln 2$ divideret med halveringstiden $T_{1/2}$, idet

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-kT_{1/2}} \quad \text{giver: } k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Vi vil nu se på det tilfælde, hvor den oprindelige kerne henfalder til en ny kerne, som også er radioaktiv, noget der er velkendt for henfaldskæderne Uranserien-, Thorium- og Actinium serien.

Betegnes de to kerner med henholdsvis (1) og (2), kan man opstille to differentiallyigninger. Den første for kerne (1), som er identisk med (2.1), mens den anden udtrykker, at kerne (2) produceres med en hastighed, der er lig med *aktiviteten* af kerne (1), og sønderdeles efter henfaldsloven.

$$(2.2) \quad \frac{dN_1}{dt} = -k_1 N_1 \quad \text{og} \quad \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_1}{dt} - k_2 N_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dN_2}{dt} = k_1 N_1 - k_2 N_2$$

Den sidste differentiallyigning er af formen:

$$(2.3) \quad \frac{dy}{dx} = -ky + h(x)$$

Den løses ved at flytte leddet $-k \cdot y$ over på venstre side, multiplicere ligningen med e^{kx} og omskrive til en enkelt differentialekvotient:

$$(2.4) \quad \frac{dy}{dx} = -ky + h(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} e^{kx} + k e^{kx} y = h(x) e^{kx} \Leftrightarrow \frac{d(ye^{kx})}{dx} = h(x) e^{kx}$$

hvis $H(x) = \int h(x) e^{kx} dx$, så har differentiallyigningen løsningen:

$$(2.5) \quad ye^{kx} = H(x) + c \Leftrightarrow y = H(x) e^{-kx} + c e^{-kx}$$

Konstanten c er som sædvanlig en integrationskonstant, der er bestemt af begyndelsesbetingelserne. Erstatte man x med t , y med N_2 og $h(x)$ med $N_1(t)$ i (2.3) og foretages de samme omskrivninger med de nye variable finder man:

$$\frac{dN_2}{dt} = k_1 N_1 - k_2 N_2 \quad \wedge \quad N_1 = N_0 e^{-k_1 t} \quad \Rightarrow$$

$$e^{k_2 t} \cdot \frac{dN_2}{dt} + k_2 e^{k_2 t} \cdot N_2 = k_1 N_0 e^{-k_1 t} e^{k_2 t} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d(e^{k_2 t} \cdot N_2)}{dt} = k_1 N_0 e^{(k_2 - k_1)t} \Leftrightarrow$$

$$e^{k_2 t} \cdot N_2 = N_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + c \Leftrightarrow$$

$$N_2 = N_2(t) = N_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + c e^{-k_2 t}$$

Konstanten c bestemmes ved: $N_2(0) = 0 \Rightarrow c = -N_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1}$. Løsningen bliver herefter:

$$N_2(t) = N_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} - N_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_2 t} \Leftrightarrow$$

(2.6)

$$N_2(t) = N_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{(k_2 - k_1)t} - 1) e^{-k_2 t}$$

Bemærk, at $N_2 > 0$ for $t > 0$, uafhængig af om $k_2 > k_1$ eller omvendt. (Tilfældet $k_2 = k_1$, har kun matematisk interesse, men løsningen er $N_2 = k_1 N_0 t e^{-k_2 t}$).

Resultatet er imidlertid relativt let at fortolke, idet de første to faktorer er det antal N_1 kerner, der er henfaldet til N_2 kerner, men som ikke er henfaldet endnu, og den sidste faktor er henfaldsloven for N_2 kerner.

Hvis henfaldskæden er længere en tre kerner, kan det i princippet løses helt på den samme måde, idet man blot skal erstatte udtrykket for $N_1(t)$ med udtrykket for $N_2(t)$ i differentiaalligningen for $N_3(t)$.

Løsninger af typen (2.6) kan anvendes til aldersbestemmelse for et radioaktivt stof.

I praksis kender man de to sønderdelingskonstanter k_1 og k_2 samt forholdet mellem de to kerner N_2/N_1 . Dette giver følgende ligning, fra hvilken man i princippet kan bestemme den tid, der er forløbet siden kernerne (1) blev skabt.

Denne slags beregninger har givet de første troværdige beregninger af jordens faktiske alder

$$(2.7) \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{N_0 \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{(k_2 - k_1)t} - 1) e^{-k_2 t}}{N_0 e^{-k_1 t}} = \frac{k_1}{k_2 - k_1} (1 - e^{(k_1 - k_2)t})$$

Man ser, at hvis: $k_2 > k_1$, så vil $\frac{N_2}{N_1} \rightarrow \frac{k_1}{k_2 - k_1}$ for $t \rightarrow \infty$

3. Retlinet bevægelse af en partikel i væsker og gasser

Når man analyserer mekaniske systemer, så antager man som regel, at de er gnidningsfrie. Dette er naturligvis kun realistisk i en vis udstrækning, men de differentialligninger, der beskriver systemet, kan ofte kun løses, hvis man ser bort fra gnidning, eller hvis gnidningskraften ikke afhænger af hastigheden andet end lineært.

Vi vil nu beskrive nogle simple eksempler på bevægelse i gasser og væsker, hvor gnidningen (viskositeten) afhænger af hastigheden.

3.1 kugleformet legeme som synker i en væske

Vi skal først betragte en partikel (karakteristisk en kugle), der synker i en væske under påvirkning af tyngdekraften.

Hvis partiklens hastighed i væsken ikke er for stor, er der tale om *laminar* strømning.

I dette tilfælde er gnidningskraften proportional med og modsat rettet hastigheden.

Hvis hastigheden vokser, er der derimod tale om *turbulent* strømning.

Turbulens kan bedst beskrives ved, at der opstår strømhvirvler i væsken eller gassen.

Turbulens er et af de stadig delvis uløste problemer i den klassiske fysik. Ingen har kunnet give en stringent teoretisk forklaring på, hvorfor og især hvornår turbulens opstår.

Et teoretisk udtryk for gnidningskraften på en kugle ved *laminar* strømning er givet ved Stokes lov.

$$(3.1) \quad F_{gn} = 6\pi\eta r v$$

Hvor r = Radius af kuglen, v = Hastigheden, η = viskositetskoefficienten af væsken.

I det følgende, vil vi blot for kortheds skyld skrive proportionaliteten mellem gnidningskraft og hastighed som $F_{gn} = \alpha \cdot v$. Denne formel gælder uafhængig af legemets form, blot der er tale om laminar strømning. For en bevægelse langs en x -akse gælder der som bekendt:

$$\text{Hastighed: } v = \frac{dx}{dt}, \quad \text{acceleration: } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{og} \quad \text{Newtons 2. lov: } F_{res} = ma$$

Et legeme, der synker i en væske, vil være påvirket af:

1. Tyngdekraften $F_T = mg$.

2. En opdrift $F_{op} = \rho_v V g$

(Lig med tyngden af den fortrængte væskemængde) hvor ρ_v er væskens massefylde og $V = \frac{m}{\rho}$ er rumfanget af legemet med masefylden ρ .

3. gnidningskraften: $F_{gn} = \alpha v$

$$F_T - F_{op} = mg - \rho_v Vg = \rho Vg - \rho_v Vg = (\rho - \rho_v)Vg = m_r g,$$

hvor $m_v g$ er det, som tyngden reduceres til, når legemet nedsænkes i væsken. Bevægelsesligningen er derfor:

$$(3.2) \quad F_{res} = ma \Leftrightarrow m \frac{dv}{dt} = m_v g - \alpha v \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} v = \frac{m_v}{m} g$$

For nemheds skyld sætter vi $g_v = \frac{m_v}{m} g$

Ligningen løses helt på samme måde, som vi gjorde det i (2.4). Vi multiplicerer med $e^{\frac{\alpha}{m}t}$ og omskriver.

$$(3.3) \quad \begin{aligned} e^{\frac{\alpha}{m}t} \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} e^{\frac{\alpha}{m}t} v &= e^{\frac{\alpha}{m}t} g_v \Leftrightarrow \\ \frac{d(v e^{\frac{\alpha}{m}t})}{dt} &= e^{\frac{\alpha}{m}t} g_v \Leftrightarrow \\ v e^{\frac{\alpha}{m}t} &= \frac{m}{\alpha} e^{\frac{\alpha}{m}t} g_v + c \end{aligned}$$

Som løses med hensyn til v .

$$(3.4) \quad \begin{aligned} v &= \frac{m g_v}{\alpha} + c e^{-\frac{\alpha}{m}t} \Leftrightarrow \\ v &= \frac{m_v g}{\alpha} + c e^{-\frac{\alpha}{m}t} \end{aligned}$$

Tilføjer vi begyndelsesbetingelsen $v(0) = 0$, finder man $c = -\frac{m_v g}{\alpha}$, som indsat i løsningen giver

$$(3.5) \quad v = \frac{m_v g}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t})$$

Det ses, at hastigheden nærmer sig asymptotisk til $v_\infty = \frac{m_v g}{\alpha}$.

Halveringstiden for at opnå denne hastighed, findes på sædvanligvis som:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k} \quad \text{og} \quad k = \frac{\alpha}{m} \quad \Rightarrow \quad t_{\frac{1}{2}} = \frac{m \ln 2}{\alpha}.$$

For de fleste bevægelser i væsker opnås sluthastigheden meget hurtigt.

Ligningen (3.5) kan naturligvis integreres for at opnå strækningen x . Man finder:

$$(3.6) \quad x = x_0 + \frac{m_v g}{\alpha} (t + \frac{m}{\alpha} (e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1))$$

Hvis legemet har begyndeshastigheden v_0 og bevægelsen er modsat rettet tyngden, skal der skiftes fortegn på mg leddet i (3.4) og $c = v_0 + \frac{mvg}{\alpha}$.

Vi finder i dette tilfælde løsningen:

$$(3.7) \quad v = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{mvg}{\alpha} (e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1)$$

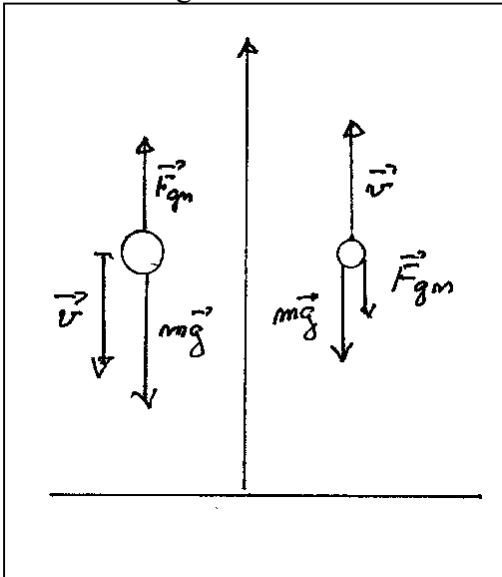
Vi ser at hastigheden igen nærmer sig asymptotisk til $v_\infty = -\frac{mvg}{\alpha}$

3.2 Lodret turbulent bevægelse i væsker og gasser

En del studieretningsrapporter beskæftiger sig med bevægelse med luftmodstand eller bevægelse i væsker. I de senere år har rapporterne været centreret på optagelse af bevægelserne med højhastighedskamera, fulgt af analyse af billederne med et computerprogram.

Med den nuværende matematik- og fysikundervisning i gymnasiet er en teoretisk indgang nok ikke særlig oplagt, men alligevel er det ikke uinteressant at kunne sammenligne med teori.

Jeg har haft meget svært ved at finde en teoretisk behandling af emnerne nedenfor, så jeg kan ikke henvise til nogen kilder.



Vi skal se på et legeme, der bevæger sig lodret i en væske eller luftart. Kun påvirket af tyngdekraften, opdriften og den gnidningsmodstand, som skyldes viskositet.

For væsker deler bevægelsesligningerne op, eftersom legemets massefylde er større end væskens (legemet synker) eller omvendt, så legemet bevæger sig op.

Gnidningsmodstanden er altid rettet modsat hastigheden, mens tyngdekraften altid er nedadrettet.

Vi anvender følgende udtryk semi-empiriske udtryk for gnidningskraften:

$$(3.8) \quad F_{visc} = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2$$

ρ er massefylden for væsken/luften, A er tværsnitsarealet for legemet, v er hastigheden og c_w er den såkaldte

(dimensionsløse) formfaktor. For nemheds skyld sætter vi: $F_{visc} = cv^2$

En omtrentlig værdi for c_w kan findes i en tabel, f.eks. Databogen, hvor man også finder den kinematiske viskositet ν og den dynamiske viskositet η .

Sammenhængen mellem de to viskositeter, er den, at $\eta = \nu \rho$.

c_w er angivet for forskellige udformninger af legemet og Reynoldstallet, som er defineret som:

$$(3.9) \quad Re = \frac{v \cdot D}{\nu}$$

v (i tælleren) betegner hastigheden og ν i nævneren den kinematiske viskositet. D er den lineære udstrækning af legemet.

Det bemærkes, at bevægelsesligningerne nedenfor godt kan løses, hvis man i stedet anvender

Stokes lov for gnidningsmodstanden: $F_{stoke} = 6\pi\eta r v$, men det giver resultater, der for legemer med

en diameter på nogle centimeter, og som vejer omk. 100 gram, som ikke er i overensstemmelse med erfaringen.

Hvis legemet bevæger sig op på grund af opdriften, vil det være påvirket af opdriften, samt tyngdekraften, og gnidningsmodstanden, som begge har samme retning:

$$(3.10) \quad F_{res} = F_T + F_{op} + F_{visc} \Leftrightarrow ma = -mg + m_v g - cv^2$$

Hvis legemet derimod synker, gælder der, at legemet er påvirket af opdriften, samt tyngdekraften og gnidningsmodstanden, som nu er modsat rettede:

$$(3.11) \quad F_{res} = F_T + F_{op} + F_{visc} \Leftrightarrow ma = -mg + m_v g + cv^2$$

m betegner massen af legemet, og m_v er den fortrængte væskemængde, ifølge Arkimedes lov.

3.2.1 Opadgående bevægelse:

$$(3.12) \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_v - m}{m} g - \frac{c}{m} v^2$$

Vi sætter $\mu = \frac{m_v - m}{m}$

$$(3.13) \quad a = \frac{dv}{dt} = \mu g - \frac{c}{m} v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \mu g \left(1 - \frac{c}{\mu g m} v^2\right)$$

Ligningen kan løses direkte ved separation af de to variable v og t , og lidt regne-regne, men man kan også gætte løsningen ved at bemærke, at $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$.

Sætter vi nemlig $k^2 = \frac{c}{\mu g m}$, antager ligningen formen:

$$(3.14) \quad \frac{dv}{dt} = \mu g (1 - (kv)^2)$$

som ses at have løsningen:

$$(3.15) \quad v = \frac{1}{k} \tanh(\mu g k t)$$

eller når man indsætter værdien for k :

$$(3.16) \quad v = \sqrt{\frac{(m_v - m)g}{c}} \tanh \sqrt{\frac{c(m_v - m)g}{m^2}} t$$

\tanh nærmer sig hurtigt asymptotisk til 1, f.eks. er $\tanh(1) = 0.76$ og $\tanh(2) = 0.96$.

Sluthastigheden bliver: $v = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{(m_v - m)g}{c}}$

hvilket også kan ses direkte, ved i (3.13) at sætte: $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \mu g(1 - (kv)^2) = 0 \Leftrightarrow v = \frac{1}{k}$.

Tænker vi os f.eks. en badebold med diameter $0,30 \text{ m}$, så vil vi forsøge, at udregne den fart, hvormed den forlader overfladen, hvis den er holdt under vand. Man kan slå formfaktoren op i en tabel, og der finder man, at den for en kugle er $c_w = 0,2$.

For ovennævnte badebold giver dette værdien $c = 7,07 \text{ kg/m}$.

$$(3.17) \quad F_{\text{visc}} = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2 = c v^2.$$

Løser vi ligningen:
$$\sqrt{\frac{c(m_v - m)g}{m^2}} t = 2,$$

som svarer til 96% af sluthastigheden, ses, at det drejer sig om brøkdele af et sekund, før den er opnået, så i eksemplerne nedenfor, kan vi anvende sluthastigheden. $v = \sqrt{\frac{(m_v - m)g}{c}} = 4,4 \text{ m/s}$.

Slippes en badebold, der er holdt under vand, vil den efter at have nået overfladen,

hoppe stykket $h = \frac{v^2}{2g} = 0,98 \text{ m}$.

For en bordtennisbold med radius 2 cm , og massen $3,0 \text{ g}$ forløber regningerne således:

$$\text{Re} = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{4 \cdot 0,04}{1,0 \cdot 10^{-6}} = 1,6 \cdot 10^7,$$

som giver formfaktoren:

$$c_w = 0,2. \quad A = \pi (0,02)^2 \text{ m}^2 = 1,26 \cdot 10^{-3}, \quad \rho = 10^3 \text{ kg/m}^3. \quad \text{Heraf udregnes:}$$

$$c = \frac{1}{2} c_w \rho A = 0,1 \cdot 10^3 \cdot 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} = 0,126 \text{ g/m}. \quad m_v = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = 0,0335 \text{ kg}.$$

Sluthastigheden bliver:
$$v = \sqrt{\frac{(m_v - m)g}{c}} = \sqrt{\frac{0,0305 \cdot 9,82}{0,126}} \text{ m/s} = 1,54 \text{ m/s}$$

Med denne sluthastighed skulle bolden altså kunne hoppe et stykke: $h = \frac{v^2}{2g} = 0,12 \text{ m}$

3.2.2 Nedadgående bevægelse:

Vi ser nu på et legeme, der synker i vand: Bevægelsesligningen er:

$$(3.18) \quad F_{\text{res}} = F_T + F_{\text{op}} + F_{\text{visc}} \Leftrightarrow ma = -mg + m_v g + c v^2$$

Forskellen fra før er blot, at massen af legemet $m > m_v$ (massen af den fortrængte væskemængde). Bevægelsesligninger bliver den samme som før, bortset fra et minustegn:

$$(3.19) \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_v - m}{m} g + \frac{c}{m} v^2 = -\frac{m - m_v}{m} g + \frac{c}{m} v^2$$

Vi sætter $\mu = \frac{m - m_v}{m}$ og får da:

$$(3.20) \quad a = \frac{dv}{dt} = -\mu g + \frac{c}{m} v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\mu g \left(1 - \frac{c}{\mu g m} v^2\right)$$

Ligningen har den samme løsning som før (bortset fra et minustegn)

Hvis vi som før sætter vi: $k^2 = \frac{c}{\mu g m}$, antager ligningen formen;

$$(3.21) \quad \frac{dv}{dt} = -\mu g (1 - (kv)^2),$$

som ses at have løsningen:

$$(3.22) \quad v = -\frac{1}{k} \tanh(\mu g k t) \Leftrightarrow v = -\sqrt{\frac{(m - m_v)g}{c}} \tanh \sqrt{\frac{c(m_v - m)g}{m^2}} t$$

Ser vi f.eks. på en jernkugle med radius 5 cm og massefylde $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, finder man for c :
 $c = 0,79$ (SI-enheder), $m_v = \rho_{\text{vand}} V_{\text{kugle}} = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 4/3(5 \cdot 10^{-2})^3 \text{ kg} = 0,524 \text{ kg}$, og
 $m = \rho_{\text{jern}} V_{\text{kugle}} = 7,8 \cdot 10^3 \cdot 4/3(5 \cdot 10^{-2})^3 \text{ kg} = 4,1 \text{ kg}$.
 Heraf får man sluthastigheden:

$$v = -\sqrt{\frac{(m - m_v)g}{c}} = 6,7 \text{ m/s} = 24 \text{ km/h}$$

3.2.3 Lodret bevægelse i luft

For bevægelse i luft kan man i almindelighed se bort fra opdriften. De to bevægelsesligninger bliver:

$$\text{Bevægelse op:} \quad F_{\text{res}} = F_T + F_{\text{luft}} \Leftrightarrow ma = -mg - cv^2$$

$$\text{Bevægelse ned:} \quad F_{\text{res}} = F_T + F_{\text{luft}} \Leftrightarrow ma = -mg + cv^2$$

Vi løser først for bevægelsen op:

$$(3.24) \quad a = \frac{dv}{dt} = -g - \frac{c}{m} v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -g \left(1 + \frac{c}{mg} v^2\right)$$

Vi sætter $k = \sqrt{\frac{c}{mg}}$ og får

$$(3.25) \quad \frac{dv}{dt} = -g(1 + (kv)^2)$$

Som før, kan ligningen løses ved separation af de to variable v og t , men det er lettere at bemærke, at $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$, og så gætte på en løsning af formen $v = -a \tan bt$.

$$\frac{dv}{dt} = -a(1 + \tan^2 bt)b$$

Ved sammenligning med:

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 + (kv)^2)$$

ses at

$$\tan bt = kv \Rightarrow v = \frac{1}{k} \tan bt, \quad \text{så} \quad a = -\frac{1}{k} \quad \text{og} \quad \text{følgelig} \quad ab = -g \quad \Rightarrow \quad b = gk$$

Løsningen er derfor:

$$(3.26) \quad v - v_0 = -\frac{1}{k} \tan(kgt) \quad \text{hvor} \quad k = \sqrt{\frac{c}{mg}} \quad \text{og} \quad c = \frac{1}{2} c_w \rho A$$

For $kgt \ll 1$ er $\tan(kgt) = kgt$, og formelen går over i $v = v_0 - gt$, som den burde.

For en bold med $r = 0,05 \text{ m}$ og masse $m = 250 \text{ g}$ er $c = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}$ og $k = 0,0285 \text{ s/m}$.

Hvis denne bold kastes op med en begyndeshastighed på $5,0 \text{ m/s}$, kan vi bestemme tidspunktet, hvor den vender ved at løse ligningen: $v = 0 \Leftrightarrow \tan gkt = kv_0$, som giver: $t = 0,51 \text{ s}$.

Hvis man vil finde, hvor langt den når op, skal man integrere ligningen ovenfor:

$$(3.27) \quad s - s_0 = -\frac{1}{k^2 g} \ln(\cos(gkt))$$

Udregner man denne strækning, svarende til en begyndeshastighed $v_0 = 5,0 \text{ m/s}$, så er der kun en forskel på 2. decimal i forhold til et lodret kast uden luftmodstand.

Vi skal derefter se på et frit fald med luftmodstand:

$$F_{res} = F_T + F_{luft} \Leftrightarrow ma = -mg + cv^2 \quad \text{som fører til ligningen:}$$

$$-\frac{dv}{dt} = -g + \frac{c}{m} v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -g \left(1 - \frac{c}{mg} v^2\right) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -g(1 - (kv)^2)$$

Hvor vi har sat $k^2 = \frac{c}{mg}$. Den sidste ligning har som vist ovenfor løsningen:

$$(3.28) \quad v = -\frac{1}{k} \tanh(gkt)$$

Sluthastigheden er $v = -\frac{1}{k} = -\sqrt{\frac{mg}{c}}$

Indsættes værdierne for $c = 8,1 \cdot 10^{-3}$, svarende til en kugle med $r = 0,10$ m, og massefylde $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, får man: $v_{slut} = 226 \text{ m/s}$.

Strækningen kan bestemmes ved at integrere hastigheden. Man får: $s - s_0 = \frac{1}{gk^2} \ln(\cosh(gkt))$

Sluthastigheden opnås omtrent når $gkt = 2$, som giver $t = 1/gk = 46 \text{ s}$.

Dette vil svare til en strækning: $s - s_0 = 5200 \text{ m}$.

Jeg kan ikke stå til ansvar for, hvorvidt ovenstående beregninger passer med virkeligheden. F.eks. er formfaktoren er kun fastlagt på nær en faktor 2.

4. Det Skrå kast

Som indledning vil vi betragte det skrå kast uden luftmodstand, også for at kunne sammenligne med kastet, når der er luftmodstand.

4.1 Skråt kast uden luftmodstand

Vi antager at en partikel affyres med elevationen θ (vinklen med vandret), og med begyndelsehastighed v_0 . De velkendte bevægelsesligninger er:

$$(4.1) \quad \vec{F}_{res} = m\vec{g} \quad \text{hvor} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\text{Begyndelsehastigheden})$$

Bevægelsen er med konstant acceleration i x - y planen, hvorfor der gælder ligningerne.

$$(4.2) \quad \vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0 \quad \text{og} \quad \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0$$

Sætter vi $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ finder man ved direkte indsætning i (4.2)

$$(4.3) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta - gt \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta t \\ v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

Stighøjden kan bestemmes ved at sætte $v_y = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$, som indsat i y giver:

$$(4.4) \quad y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$$

Kastevidden (længden af kastet) kan bestemmes ved at løse ligningen $y = 0$:

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ t = 0 \quad \vee \quad t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

Kastevidden bestemmes da ved at indsætte den anden løsning i udtrykket for x , som kan reduceres til: (idet $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$)

$$(4.5) \quad x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Det længste kast opnås ved $\sin 2\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 45^\circ$, som det er velkendt fra den elementære fysikundervisning.

Banekurven er i øvrigt en parabel, hvilket kan ses, ved at eliminere tiden t fra de to ligninger for x og y . Man finder:

$$y = x \tan \theta - \frac{\frac{1}{2}g}{(v_0 \cos \theta)^2} x^2$$

Kurven kaldes som bekendt en kaste-parabel.

4.2 Skråt kast med luftmodstand

Ved hastigheder blot over 5,0 m/s er antagelsen om laminar strømning næppe opfyldt, men bevægelsesligningerne lader sig ikke løse analytisk, hvis der er tale om turbulent strømning. Ved turbulent strømning er gnidningskraften $F_{gn} = v^\beta$, hvor $1 < \beta \leq 2$. Så vi vil foreløbig nøjes med at løse bevægelsesligningerne for laminar strømning. For bevægelse i gasser, kan man i almindelighed se bort fra opdriften, så i dette tilfælde er:

$$(4.6) \quad F_{gn} = \alpha |\vec{v}| \quad \text{og} \quad \vec{F}_{gn} = -\alpha \vec{v}$$

Bevægelsesligningerne bliver da:

$$(4.7) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{\alpha}{m} \vec{v} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\alpha}{m} v_x \quad \text{og} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{\alpha}{m} v_y$$

Disse to differentialligninger har vi imidlertid allerede løst for en retlinet bevægelse i (3.4) og (3.5).

Er begyndeshastigheden $\vec{v} = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$, finder man løsningerne:

$$(4.8) \quad v_x = v_0 \cos \theta \cdot e^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad \text{og} \quad v_y = v_0 \sin \theta \cdot e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{mg}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t})$$

Hvis $\frac{\alpha}{m} \cdot t \ll 1$, altså hvis gnidningsmodstanden er forsvindende lille, så kan man benytte tilnærmelsen $e^x \approx 1 + x$.

$$(4.9) \quad v_x = v_0 \cos \theta \cdot (1 - \frac{\alpha}{m} \cdot t) \quad \text{og} \quad v_y = v_0 \sin \theta \cdot (1 - \frac{\alpha}{m} \cdot t) - \frac{mg}{\alpha} (1 - (1 - \frac{\alpha}{m} \cdot t))$$

Hvis vi dropper alle led, proportionale med α , finder man de tidligere udledte udtryk for skråt kast uden gnidning (hvilket altid er betryggende i en teoretisk udledning).

$$v_x = v_0 \cos \theta \quad \text{og} \quad v_y = v_0 \sin \theta - g \cdot t$$

For at finde positionen (x,y) , skal vi integrere (4.2) med hensyn til tiden.

Vælger vi $(x_0, y_0) = (0,0)$, finder man:

$$x = v_0 \cos \theta \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{m}t} dt \quad \text{og} \quad y = v_0 \sin \theta \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{m}t} dt - \frac{mg}{\alpha} \int_0^t (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}) dt$$

$$(4.10) \quad x = v_0 \cos \theta \cdot \frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}) \quad \text{og} \quad y = v_0 \sin \theta \cdot \frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}) - \frac{mg}{\alpha} (t - \frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}))$$

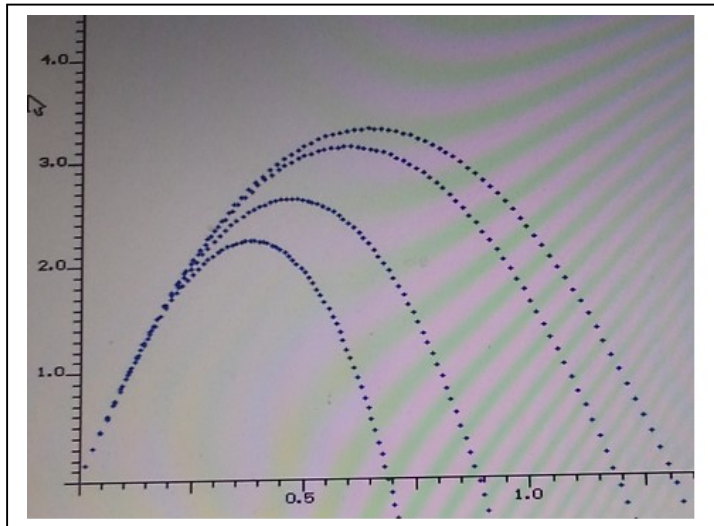
Igen, hvis $\frac{\alpha}{m}t \ll 1$, altså hvis gnidningsmodstanden er forsvindende lille, kan man benytte tilnærmelsen $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ med $x = \frac{\alpha}{m}t$. Hvis man dropper alle led, der er proportionale med α , finder man igen de tidligere udledte udtryk for skråt kast uden gnidning

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t \quad \text{og} \quad y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$$

Hverken (4.8) eller (4.10) er særlig gennemskuelige eller anvendelige til teoretiske beregninger. Det er muligt at finde stighøjden, idet ligningen $v_y = 0$, godt kan løses, for at bestemme t , som så kan indsættes i udtrykket for y .

Man kan imidlertid ikke finde et analytisk udtryk for kastevidden, idet ligningen (4.3) $y = 0$, er en transcendent ligning. Vi skal senere se på numerisk løsning af differentialligninger.

Som omtalt kan bevægelsesligningerne for det skrå kast ikke løses, hvis luftmodstanden er proportional med v^2 , men nedenfor er angivet en numerisk løsning med værdier for $\alpha = 0$ (ingen luftmodstand), $\alpha = 0.0001$, $\alpha = 0.0005$, $\alpha = 0.001$.



5. Dæmpet harmonisk svingning

En harmonisk svingning er en retliniet bevægelse (langs en x -akse), hvor den resulterende kraft er proportional med afstanden til ligevægtsstillingen ($x=0$) og til stadighed rettet mod ligevægtsstillingen. Der gælder altså ligningen

$$(5.1) \quad F_{res} = -k \cdot x \Leftrightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

Sætter man $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, finder man den fuldstændige løsning:

$$(5.2) \quad x = A \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

A er amplituden, ω kaldes den cykliske frekvens, og φ_0 er begyndelsesfasen.

Svingningstiden er givet ved udtrykket: $T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

I matematik undervisningen skriver man den fuldstændige løsning til (5.1) på en lidt anden måde:

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

At dette faktisk er den samme løsningsformel, kan indses, idet man anvender additionsformlen

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

på løsningen (5.2)

$$x = A \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = A \cos(\varphi_0) \cos(\omega \cdot t) - A \sin(\varphi_0) \sin(\omega \cdot t)$$

og sætter $c_1 = A \cos(\varphi_0)$ og $c_2 = -A \sin(\varphi_0)$,

som har løsningerne: $\tan \varphi = -\frac{c_2}{c_1}$ og $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

Hvis der er friktion i bevægelsen, skal der tilføjes endnu et led til differentialligningen (5.1). Vi vil først gøre den antagelse, at friktionen er proportional med og modsat rettet hastigheden. Proportionalitetskoefficienten vil afhænge af hvilket legeme, der er tale om, og hvilket medium (væske, luft) den bevæger sig i.

$$F_{gn} = -\alpha \cdot v \Rightarrow F_{gn} = -\alpha \frac{dx}{dt}$$

Differentialligningen for bevægelsen bliver herefter:

$$\begin{aligned}
 (5.3) \quad F_{res} &= -k \cdot x + F_{gn} \quad \Leftrightarrow \\
 m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\alpha \frac{dx}{dt} - kx \quad \Leftrightarrow \\
 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x &= 0
 \end{aligned}$$

Det viser sig noget mere besværligt, at løse differentialligningen (5.3) end (5.1). Før vi går i gang, omskriver vi ligningen for at få et mere generelt udtryk:

$$(5.4) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c \cdot x = 0 \quad \text{hvor} \quad b = \frac{\alpha}{m} \quad \text{og} \quad c = \frac{k}{m}$$

(5.4) er en 2. ordens, lineær, homogen differentialligning med konstante koefficienter b og c . Lineær, fordi alle led, der indeholder x optræder i 1. potens. Homogen, fordi der ikke er noget led, som afhænger eksplicit af t .

5.1 Løsning af differentialligningen ved hjælp af komplekse tal

Ligningen (5.2) kan altid løses, idet løsningen kan reduceres til at finde de komplekse løsninger til en 2. grads ligning. Tilsvarende kan løsning af en n -te ordens lineær, homogen differentialligning med konstante koefficienter, reduceres til at bestemme de komplekse rødder i et n 'te grads polynomium.

Selv om komplekse tal ikke er en del af gymnasiets pensum i matematik, vil vi alligevel vise metoden, fordi den er enkel og effektiv.

For at løse ligningen (5.4) sætter vi $x = e^{z \cdot t}$ hvor z er et komplekst tal. Det følger så:

$$\frac{dx}{dt} = z \cdot e^{z \cdot t} \quad \text{og} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = z^2 \cdot e^{z \cdot t}$$

Indsættes dette i (5.4) og bortforkorter man $e^{z \cdot t}$ får man 2.gradsligningen:

$$z^2 + b \cdot z + c = 0$$

Diskriminanten: $d = b^2 - 4 \cdot c$. Hvis $d > 0$ har 2. gradsligningen de to reelle løsninger.

$$(5.5) \quad z = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot c}}{2} \quad \vee \quad z = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot c}}{2}$$

Vender vi tilbage til den oprindelige differentialligning, ses det, at $c = k/m > 0$, så begge løsninger i (5.5) er negative. (Hvis $d = 0$) reduceres det til en løsning.

Hvis $d < 0$ har 2. gradsligningen ingen reelle løsninger, men til gengæld de to komplekse løsninger:

$$(5.5) \quad z = -\frac{b}{2} + i \frac{\sqrt{4 \cdot c - b^2}}{2} \vee z = -\frac{b}{2} - i \frac{\sqrt{4 \cdot c - b^2}}{2}$$

Her er i den komplekse enhed. $i^2 = -1$.

I teorien for komplekse funktioner er formlen nedenfor (Eulers ligning) en af de vigtigste formler (faktisk en af de vigtigste formler i den matematiske analyse overhovedet).

Hvis $z = x + i \cdot y$ er et komplekst tal, hvor x og y er reelle, gælder der nemlig:

$$(5.6) \quad e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Vi er (naturligvis) kun interesseret i den reelle del af løsningen til differentialligningen (5.4).

Vi bemærker endvidere, at da vi foretog substitutionen $x = e^{z \cdot t}$, kunne vi lige så godt have skrevet $x = A e^{z \cdot t + i \varphi_0}$. Hermed får vi to integrationskonstanter A og φ_0 . Sætter vi endvidere

$\omega = \frac{\sqrt{4 \cdot c - b^2}}{2}$ kan vi skrive løsningen til differentialligningen (5.4) på følgende form

$$(5.7) \quad x(t) = A e^{-\frac{b}{2}t} \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Man ser, at løsningen er en harmonisk svingning med en amplitude, der aftager eksponentielt med tiden. Dette kaldes en dæmpet harmonisk svingning. Indsættes de oprindelige værdier for b og c

$$b = \frac{\alpha}{m} \text{ og } c = \frac{k}{m},$$

hvor α er viskositetskoefficienten i ligningen: $F_{gn} = -\alpha \cdot v$ og k er "fjederkonstanten", finder man udtrykket:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

som indsat giver:

$$(5.8) \quad x(t) = A e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}} \cdot t + \varphi_0\right)$$

Forudsætningen for denne løsning er, at det som står under kvadratrodstegnet er positivt. I modsat fald, (diskriminanten d ovenfor er negativ), vil der aldrig komme en svingning i gang, men udsvinget vil nærme sig eksponentielt til ligevægtsstillingen.

Man bemærker i øvrigt, at når $\alpha = 0$, går løsningen over i det tidligere udtryk for en harmonisk svingning:

5.2 Traditionel løsning af differentialligningen

$$(5.9) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Som tidligere omskriver vi ligningen for at få et mere generelt udtryk:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c \cdot x = 0 \quad , \text{ hvor } b = \frac{\alpha}{m} \quad \text{og} \quad c = \frac{k}{m}$$

Differentialligningen kan dog også løses på traditionel vis, men metoderne er lidt forskellige. Den anvendte metode her, er i familie med den, der bruges, når man løser 1. ordens differentialligning.

Man indfører en hjælpefunktion til at omskrive differentialligningen til én, som vi kan løse, nemlig differentialligningen for den harmoniske svingning :

$$(5.10) \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 ,$$

som har løsningen:

$$(5.11) \quad y = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

For at opnå dette, ser vi på følgende differentialligning, hvor vi har sat $y = x e^{\beta t}$.

$$(5.12) \quad \frac{d^2(xe^{\beta t})}{dt^2} + \omega^2 x e^{\beta t} = 0$$

Formålet er, at omforme denne ligning til den oprindelige ligning $\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c \cdot x = 0$ ved et passende valg af konstanterne β og ω^2 . Vi udregner derfor:

$$\frac{d^2(xe^{\beta t})}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} e^{\beta t} + x \beta e^{\beta t} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} e^{\beta t} + \frac{dx}{dt} \beta e^{\beta t} + \frac{dx}{dt} \beta e^{\beta t} + x \beta^2 e^{\beta t}$$

$$\frac{d^2(xe^{\beta t})}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} e^{\beta t} + 2\beta \frac{dx}{dt} e^{\beta t} + x \beta^2 e^{\beta t}$$

Vi tilføjer leddet $\omega^2 x e^{\beta t}$, og sætter resultatet lig med nul.

$$(5.13) \quad \frac{d^2(xe^{\beta t})}{dt^2} + \omega^2 x e^{\beta t} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} e^{\beta t} + 2\beta \frac{dx}{dt} e^{\beta t} + x \beta^2 e^{\beta t} + \omega^2 x e^{\beta t} = 0$$

Ligningen reduceres ved division med $e^{\beta t}$.

$$(5.14) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + (\beta^2 + \omega^2) = 0$$

Dette sammenlignes da med den oprindelige differentialligning:

$$(5.15) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c \cdot x = 0$$

Man ser at de to differentialligninger er identiske, hvis og kun hvis:

$$\beta = \frac{b}{2} = \frac{\alpha}{2m} \quad \text{og} \quad \beta^2 + \omega^2 = c \Leftrightarrow \omega^2 = c - \frac{b^2}{4} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}.$$

Vi kan imidlertid løse (5.13) direkte. Hvis vi nemlig sætter $y = x \cdot e^{\beta t}$, er differentialligningen af formen:

$$(5.16) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

Differentialligningen (5.16) løsningen: $y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, så vi finder

$$(5.17) \quad y = x \cdot e^{\beta t} = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \Leftrightarrow \quad x = A \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Tilbagefører vi nu fra oprindelige differentialligning, hvor $\beta = \frac{\alpha}{2m}$ and $\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}$ fås:

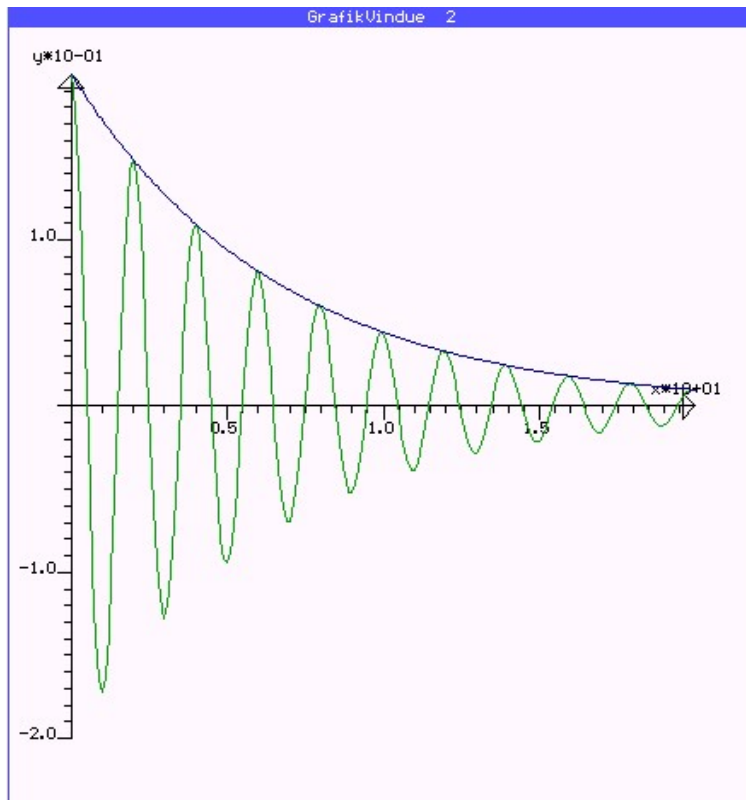
$$(5.18) \quad x(t) = A e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}} \cdot t + \varphi_0\right).$$

Vi finder altså den samme løsning, som vi fandt ved hjælp af komplekse tal, med en eksponentielt aftagende amplitude

Nedenfor er vist en grafen for en numerisk løsning af differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

For den eksponentielt dæmpede harmoniske svingning, og hvor den eksponentielle indhyldningskurve også er tegnet.



Dæmpede harmoniske svingninger findes overalt i naturen, og udtrykket (5.14) genfinder man derfor ofte til beskrivelse af sådanne svingninger.

6. Tvungen harmonisk svingning uden dæmpning

Vi betragter en tvungen svingning uden dæmpning, hvor massen m foruden ”fjederkraften”, (som opfylder Hookes lov), er påvirket af en ydre tidsafhængig kraft.

Resultaterne kan direkte overføres til en elektrisk svingningskreds men en spole og en kapacitor, som er pålagt en vekselspænding.

$$F_{res} = -k \cdot x + F_{ydre} \Leftrightarrow$$

$$(6.1) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_{ydre}(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \frac{F_{ydre}(t)}{m}$$

Vi vil antage, at den ydre kraft varierer harmonisk. $\frac{F_{ydre}(t)}{m} = \frac{f_0}{m} e^{i\omega t}$.

Løsningen til differentialligningen ovenfor er (som bekendt) en partikulær løsning til den inhomogene ligning plus den fuldstændige løsning til den homogene ligning:

$$(6.2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

som har løsningen:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \text{hvor} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Da differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m}e^{i\omega t} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m}e^{i\omega t}$$

er af 2. orden med konstante koefficienter, kan vi bestemme en partikulær løsning som: $x = Ae^{i\omega t}$ (hvor ω er den påtrykte frekvens), som indsat giver:

$$(6.3) \quad -\omega^2 Ae^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} = \frac{f_0}{m}e^{i\omega t},$$

som løses med hensyn til A til at give:

$$A = \frac{\frac{f_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen, kan herefter skrives, som den partikulære løsning plus den fuldstændige løsning til den homogene ligning

$$(6.4) \quad x = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\frac{f_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

Skriver vi dette som: $x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) + B \cdot \cos(\omega t)$, kan vi i tilfældet, hvor $A = B$ anvende den første af de logaritmiske formler for addition af to cos-funktioner:

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \quad \text{og} \quad \cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$(6.5) \quad x = 2A \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t + \frac{1}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

Systemet vil altså udføre svingninger med frekvensen $\frac{\omega_0 + \omega}{2}$ og med en "amplitude"

$2A \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t + \frac{1}{2}\varphi\right)$, der afhænger af tiden, skiftende mellem værdierne $-2A$ og $2A$.

Fænomenet kaldes for "svævninger", som især er kendt for lydbølger.

I almindelighed er de to amplituder A og B , naturligvis ikke lig med hinanden, men det ændrer kun lidt på resultatet, idet man for to tal A og B , altid kan bestemme tal C og D , således, at $A = C+D$ og $B = C - D$, og løse for C og D :

$$C = \frac{A+B}{2} \quad \text{og} \quad D = \frac{A-B}{2}$$

Så løsningen (6.4) kan skrives

$$A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) + B \cdot \cos(\omega t) = (C+D) \cos(\omega_0 t + \varphi) + (C-D) \cos(\omega t) =$$

$$C \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) + C \cdot \cos(\omega t) + D \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) - D \cdot \cos(\omega t)$$

Herefter kan løsningen omskrives til:

$$(6.6) \quad x = 2C \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t + \frac{1}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t + \frac{1}{2}\varphi\right) - 2D \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t + \frac{1}{2}\varphi\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

Resultatet er således to svævninger, med samme frekvens, men, hvor "amplituden" er $\frac{\pi}{2}$ ude af fase. Dette vanskeliggør en eksperimentel bestemmelse af frekvensen i svævningerne.

En dæmpet harmonisk svingning kan i princippet behandles på helt samme måde, men det er mindre interessant, da dæmningsleddet vil forsvinde efter en vis tid (afhængig af dæmpningen), og man derfor ikke efter et stykke tid, vil observere de svævningsfænomener, der er beskrevet ovenfor.

7. Differentiaalligninger, der ikke kan løses analytisk

Det er faktisk de færreste differentiaalligninger (problemer) i fysikken, der har en analytisk løsning. Analytisk løsning betyder, at man kan finde matematiske funktioner, der beskriver systemets position og hastighed til ethvert tidspunkt.

Den matematiske disciplin, der beskæftiger sig med numeriske løsninger til problemer, kaldes for numerisk analyse. Det er teoretisk set et omfattende område, og i modsætning til, hvad man måske umiddelbart skulle tro, så er teorien udviklet lang tid før fremkomsten af computere.

Man kan ikke overvurdere betydningen af analytiske løsninger til fysiske problemer. Alternativet er numeriske løsninger, som groft set kan karakteriseres ved at man regner med små med endelige

tilvækster Δx , Δt i stedet for med infinitesimale størrelser dx , dt , differenskvotienter $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ i stedet for

differentialkvotienter $\frac{dx}{dt}$ og summer $\sum f(t_i) \cdot \Delta t_i$ i stedet for integraler $\int f(t) dt$.

Kort sagt, man har ikke længere hele differential- og integralregningen til rådighed.

For eksempel har beregning af kastevidden ved et skråt kast overordentlig stor betydning for traditionelt artilleri. Der findes imidlertid ikke analytiske løsninger, fordi mundingshastigheden er så stor, at gnidningskraften ikke længere er proportional med farten v , men med v^α , hvor $1 < \alpha < 2$. Artillerister er derfor henvist til interpolation i meget omfattende tabeller, der afhænger af elevationen, kanonens kaliber, projektilens udformning mv.

Disse tabeller er ofte lavet på grundlag af hundrede af forsøg. I dette tilfælde er det let at forstå fordelene ved i stedet at have et analytisk funktionsudtryk.

7.1 Taylors formel

Vi vil i første omgang kun se på numerisk løsning af 1. ordens differentiaalligninger.

For at kunne vurdere nøjagtigheden af formlerne (og det er naturligvis vigtigt) er det nødvendigt at kende Taylors Formel. Denne formel kan formuleres på flere måder, hvor vi kun giver den version, der anvendes til approksimation af en funktion omkring et punkt x_0 .

Har vi givet en reel funktion $y = f(x)$, x_0 er et fast punkt og hvis h betegner en lille tilvækst til x_0 , så gælder der under ret generelle forudsætninger:

$$(7.1) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + \int_0^h \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t)}{n!} t^n dt$$

Det sidste led (restleddet) ses, at være proportionalt med h^{n+1} , vi skriver dette som $O(h^n)h$, hvor symbolet $O(h^n)$ læses som "af orden h^n ". Undlader man restleddet får man en approksimation til $f(x_0+h)$. Alt efter, hvor mange led man medtager får man en 0'te, 1., 2., ordens approksimation.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + O(h^0)h$$

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0)$$

$$(7.2) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + O(h)h$$

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$$

$$(7.3) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + O(h^2)h$$

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$$

$$(7.4) \quad \begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x_0)h^3 + O(h^3)h \\ f(x_0 + h) &\approx f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x_0)h^3 \end{aligned}$$

7.2 Numerisk løsning af 1. ordens differentialligninger

Skal vi nu løse en differentialligning af 1. orden $\frac{dy}{dx} = f'(x) = g(x, y)$, hvor vi kender en begyndelsesværdi (x_0, y_0) , så kan det gøres ved at anvende (6.1), idet

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h = y_0 + g(x_0, y_0)h$$

$$(x_1, y_1) = (x_0 + h, f(x_0 + h)) = (x_0 + h, f(x_0) + f'(x_0)h) = (x_1, y_0 + g(x_0, y_0))$$

$$(x_2, y_2) = (x_1 + h, f(x_1 + h)) = (x_1 + h, f(x_1) + f'(x_1)h) = (x_2, y_1 + g(x_1, y_1)h)$$

Metoden kaldes for numerisk integration, og når man anvender (6.1) kaldes det ofte for Euler integration.

Euler integration anvendes stort set aldrig i praksis, fordi fejlene akkumulerer, hvis fortegnet for $f'(x)$ er konstant.

For at opnå en bedre tilnærmelse til $f'(x)$ end (6.1) kan man anvende følgende:

$$(7.5) \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \frac{h}{2}) - f(x_0 - \frac{h}{2})}{h} \Leftrightarrow f(x_0 + \frac{h}{2}) = f(x_0 - \frac{h}{2}) + f'(x_0)h$$

Hvis man rækkeudvikler begge led i $f(x_0 + \frac{h}{2}) - f(x_0 - \frac{h}{2})$ ved hjælp af Taylors formel finder man:

$$f(x_0 + \frac{h}{2}) - f(x_0 - \frac{h}{2}) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{2} + \frac{1}{2}f''(x_0)\frac{h^2}{4} - (f(x_0) + f'(x_0)(-\frac{h}{2}) + \frac{1}{2}f''(x_0)\frac{h^2}{4}) + O(h^2)h$$

$$(7.6) \quad f(x_0 + \frac{h}{2}) - f(x_0 - \frac{h}{2}) = f'(x_0)h + O(h^2)h$$

Som man kan se, er denne formel korrekt til orden i h^3 , i modsætning til 2.ordens formelen. Hvis

$h = \frac{1}{10}$, så er korrektionsleddet (fejlen) af størrelsesorden $h^3 = \frac{1}{1000}$ i stedet for Euler integrationen,

hvor korrektionsleddet (fejlen) er af størrelsesorden $h^2 = \frac{1}{100}$. Det sidste er bestemt ikke

uvæsentligt for korrekte beregninger. Løsningen af 1. ordens differentialligninger foregår næsten på samme måde, som før. Man regner iterativt (skridtvis) frem i enheder af h , idet

$$(7.7) \quad f(x_0 + \frac{h}{2}) = f(x_0 - \frac{h}{2}) + f'(x_0)h = f(x_0 - \frac{h}{2}) + g(x_0, y_0)h$$

Den eneste forskel er, at man bliver nødt til at kende funktionsværdien i to punkter med afstanden $\frac{1}{2}h$, for at starte iterationen. Dette gøres imidlertid ved en eller flere Euler skridt.

Formlen (7.7) kan anvendes i en del tilfælde, men den har også nogle uheldige egenskaber, især hvis den anvendes til at løse 2. ordens differentiallyigninger.

Til løsning af praktiske problemer anvendes stort set altid Runge-Kutta's metode, der er betydelig mere kompliceret end (6.7), men hvor korrektionsleddet (fejlen) er af størrelsesorden h^4 .

De løsninger, af 1. og 2. ordens differentiallyigninger, der er lavet med Mathemat-programmet, og Satellitbevægelse - programmet er alle lavet med Runge-Kutta's metode.

Som omtalt findes der ikke analytiske løsninger til selv relativt ukomplicerede problemer i fysikken. To legeme problemet, f.eks. månens bevægelse omkring jorden eller en planets bevægelse omkring solen, kan faktisk løses analytisk, hvor løsningskurven er et keglesnit (ellipse, parabel eller hyperbel), mens 3. legeme problemet ikke har nogen eksakt analytisk løsning. Når man skal beregne energiniveauerne i et atom, er det altid brintatomet, man behandler, idet det (også i kvantemekanikken) er det eneste, der kan løses eksakt.

Faktisk var astronomerne nogle af dem, der mest energisk arbejdede på udviklingen af computere, fordi de ønskede at kunne beregne himmellegemernes baner mere korrekt.

