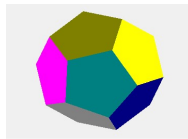


Elasticitet

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk



Indhold

1. Hookes lov	1
2. Uniform strækning ("strain")	2
3. Forskydning på tværs (shear "strain")	3
4. Torsion	5
5. Torsions pendulet og torsionssvingninger.	6
5.1 Torsionsbølger	7
6. Den bøjede bjælke.....	9
7. Buckling (At knække eller folde).....	11

1. Hookes lov

At et legeme er elastisk betyder, at hvis det deformeres af en kraft, så vender det igen tilbage til sin oprindelige form, når den kraft, der forårsagede deformationen forsvinder. Stort set alle faste stoffer har elastiske egenskaber, som følger de samme generelle lovmæssigheder.

For et homogent endimensionalt stof – en streng, en stang, eller en fjeder - med længden l gælder som bekendt Hookes lov (for moderate deformationer), at deformationen Δl forårsaget af kraften F , simpelthen er ligefrem proportional med F .

Af traditionelle grunde skrives proportionaliteten $\Delta l \propto F$ normalt den anden vej:

$$(1.1) \quad F = k\Delta l$$

Forlængelsen Δl må i øvrigt indlysende være proportional med længden l .

For hvis vi erstatter længden l med $2l$, så er begge stykker påvirket af den samme kraft F , som vil give forlængelsen $2\Delta l$.

Forlængelsen må også være omvendt proportional med tværsnitsarealet A af materialet.

Deler vi nemlig (matematisk) materialet, påvirket af kraften F , på langs op i to ens dele, så vil hver del være påvirket af kraften $\frac{1}{2}F$, og dermed give forlængelsen $\frac{1}{2}\Delta l$.

Så forlængelsen er ligefrem proportional med længden af materialet l , og omvendt proportional med tværsnitsarealet A .

$$\Delta l = k \frac{l}{A} F$$

Som omtalt skrives Hookes lov traditionelt den anden vej.

$$(1.2) \quad F = EA \frac{\Delta l}{l}$$

E er en materielkonstant, som kaldes for *Youngs modul*, og som kun afhænger af det anvendte elastiske materiale.

Kraften per arealenhed, som vi normalt betegner tryk, vil vi i forbindelse med teorien for elasticitet betegne med det engelske betegnelse "stress". På samme måde vil vi betegne forlængelsen per længdeenhed som "strain". Hookes lov kan herefter skrives:

$$(1.3) \quad \frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l} \quad \text{"stress"} = (\text{Young's modulus}) \times (\text{"strain"})$$

Har vi et stykke rektangulært materiale, så vil der være en afledt effekt af Hookes lov, når den udsættes for et "stress"

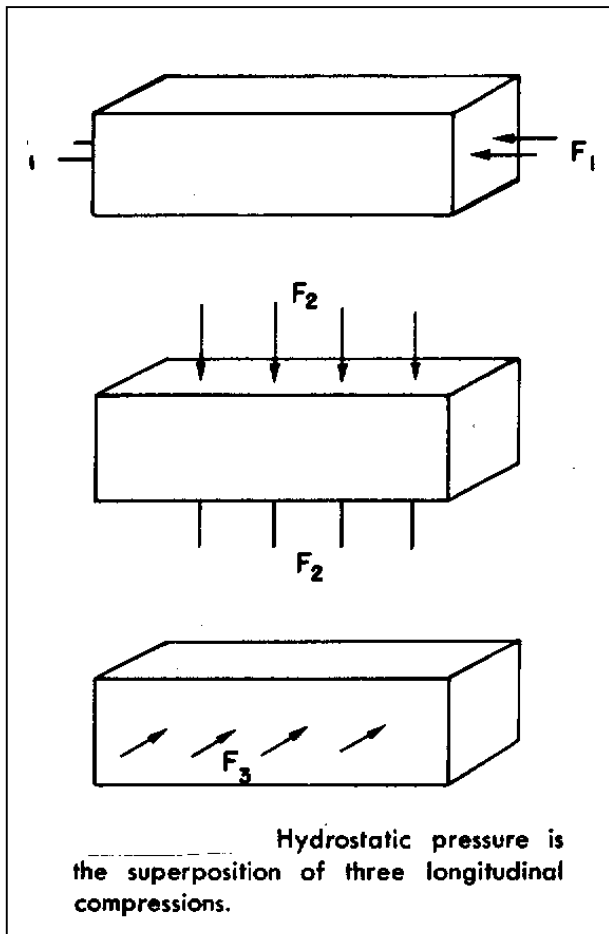
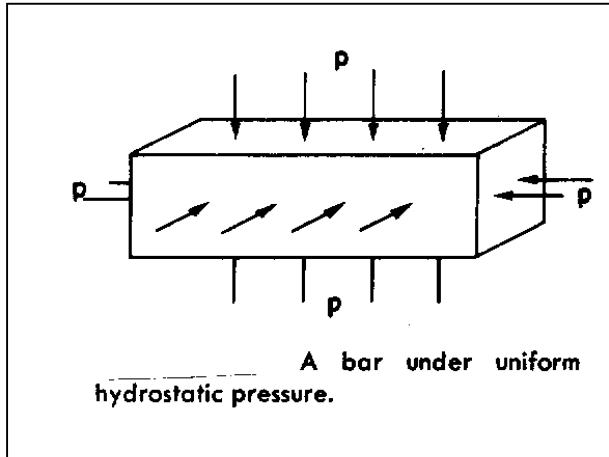
Nemlig hvis vi strækker materialet i en retning, så vil det trykkes sammen i retningerne vinkelret på retningen, hvor det bliver strakt. Sammentrykningen er proportional med bredden af materialet og med $\Delta l/l$. Den skævvridende kontraktion vil være den samme for både bredde w og højde h , og det skrives i almindelighed:

$$(1.4) \quad \frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma \frac{\Delta l}{l}$$

Konstanten σ er den anden elastiske materialkonstant. Den kaldes *Poissons forhold*.

De to konstanter: Youngs modul E og Poissons forhold σ er tilstrækkelige til at specificere ethvert elastisk materiale.

2. Uniform strækning ("strain")



Da superpositionsprincippet (addition af to fysiske størrelser) gælder for kræfter, gælder det også for de elastiske lovmæssigheder.

Vi skal indledningsvis se på en rektangulær blok udsat for et hydrostatisk tryk (figuren til venstre). Antager vi at blokken er nedsænket i en tryktank med vand, og hvis vi ser bort fra den trykforskel på over- og underside, som skyldes tyngden, så er trykket på blokken ("stress") det samme i alle retninger, og kraften på én side er proportional med sidens areal. Dette følger af definitionen på tryk $p = F/A$.

Vi skal først udregne længdeforøgelse på én side, som er summen af de forandringer, der sker på hver af de tre sider. Først det "stress", forårsaget af F_1 på figuren til venstre. Ifølge (1.3)

$$p = \frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l}, \text{ så} \quad (2.1) \quad \frac{\Delta l_1}{l} = -\frac{p}{E}$$

Dernæst ser vi på det "stress", forårsaget af kraften F_2 . Hvis vi trykker på begge sider af blokken med et tryk p så er det "strain", som følger af kompressionen som før p/E , men nu ønsker vi at beregne det langsgående "strain", men det kan vi ifølge (1.4) finde ved at multiplicere det sideværts "strain" med $-\sigma$. Det sideværts "strain" er

$$\frac{\Delta w}{w} = -\frac{p}{E}, \text{ så} \quad (2.2) \quad \frac{\Delta l_2}{l} = +\sigma \frac{p}{E}$$

Da der ikke er nogen forskel på siderne (2) og (3), Kan vi kombinere resultaterne fra de tre typer sider.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l_1}{l} + \frac{\Delta l_2}{l} + \frac{\Delta l_3}{l} = -\frac{p}{E} + \sigma \frac{p}{E} + \sigma \frac{p}{E} \Rightarrow \quad (2.3) \quad \frac{\Delta l}{l} = -\frac{p}{E}(1-2\sigma)$$

Situationen er naturligvis den samme i alle tre retninger, så vi har derfor:

$$(2.4) \quad \frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\frac{p}{E}(1-2\sigma)$$

Den relative ændring af rumfanget kan beregnes af $V = lwh$.

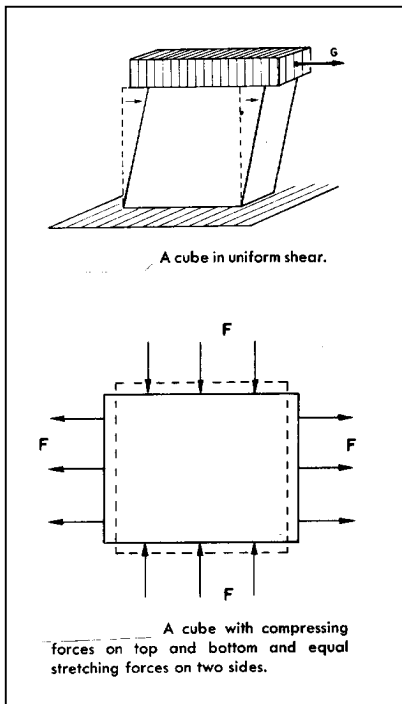
$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial V}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h = wh\Delta l + lh\Delta w + lw\Delta h$. Og ved division med $V = lwh$, får man:

$$(2.4) \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta h}{h} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -3\frac{p}{E}(1-2\sigma)$$

$\Delta V/V$ betegnes ofte som volumen "strain" og relationen (2.4) bliver derfor ofte skrevet som:

$$(2.5) \quad p = -K \frac{\Delta V}{V} \quad \text{hvor} \quad K = 3 \frac{E}{(1-2\sigma)}$$

3. Forskydning på tværs (shear "strain")



Derefter skal vi se på, hvad der sker, når vi påvirker en klods med et skævvridende "stress". Med et skævvridende "strain", forstår vi, de forskydninger, som er illustreret på figuren til venstre.

For at gøre det "simpelt", skal vi se på en terning som er påvirket af de kræfter, som er vist på figuren til venstre, nederst.

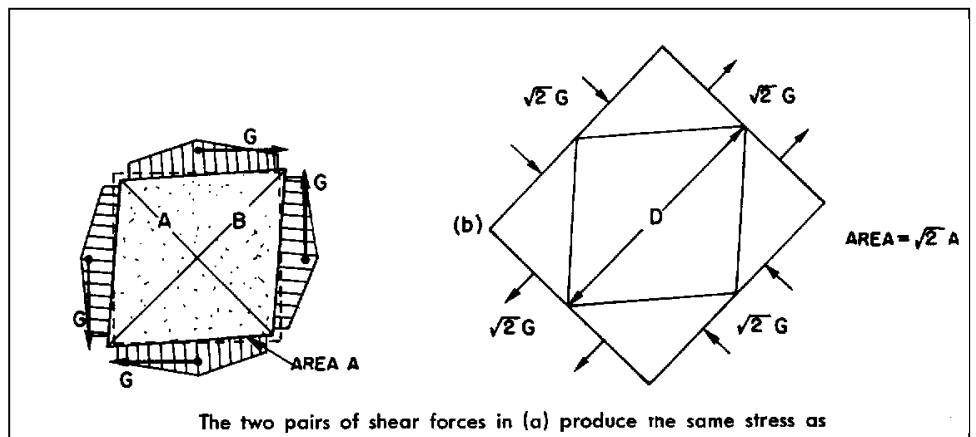
Vi skal igen dele det op i to dele. Det vertikale tryk og det horisontale skub. Idet siden af terningen betegnes A , får vi for de horisontale forskydninger.

$$(3.1) \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{A} + \sigma \frac{1}{E} \frac{F}{A} = \frac{1+\sigma}{E} \frac{F}{A}$$

Ændringen i den horisontale retning er så minus (3.1)

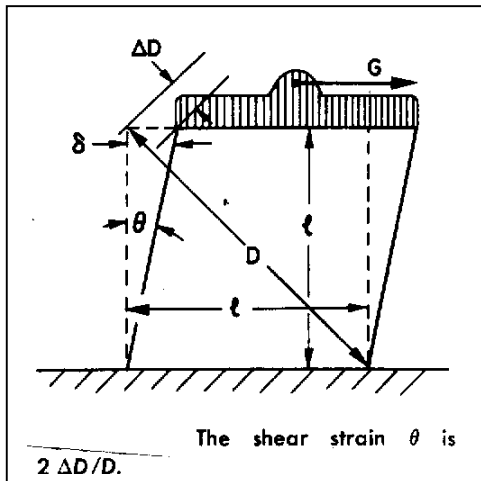
Antag nu at vi har den samme terning og påvirket af de samme skævvridende kræfter, som vist på figuren nedenfor til venstre.

Bemærk at alle de viste kræfter må være ens for at terningen er i hvile.



Summen af de to vektorer \vec{G} ligger langs med diagonalen, som har længden $\sqrt{2}G$. Arealet som er påvirket af denne kraft er $\sqrt{2}A$. Derfor er træk "stress" vinkelret på planen og lig med G/A . På samme måde, hvis vi ser på en plan med en vinkel på 45° , den anden vej, vi kan se, at der må være et kompressions "stress" vinkelret på denne plan og lig med $-G/A$.

Ud fra dette ser vi, at stresset fra en skævvridende påvirkning er en kombination af strækning og sammentrykning vinkelret på hinanden, og som danner en vinkel på 45° med terningens flader. De indre "stress" og "strain" er de samme, som vi finder i en større blok med de kræfter og som er vist på figuren ovenfor til højre. Men for den blok, har vi allerede løst problemet. Ændringen i diagonalens længde er givet ved (3.1).



$$(3.2) \quad \frac{\Delta D}{D} = \frac{1 + \sigma}{E} \frac{G}{A}$$

En diagonal bliver forkortet, mens den anden bliver forlænget.

Det er ofte praktisk at udtrykke et skævvridende "strain", ved hjælp af den vinkel ved hvilken terningen er vredet, altså vinklen θ på figuren til venstre.

Fra figurens geometri, kan man se, at den horisontale forskydning δ på kanten i toppen er lig med $\sqrt{2}\Delta D$, så

$$(3.3) \quad \theta = \frac{\delta}{l} = 2 \frac{\Delta D}{D}$$

Det skævvridende "stress" η er defineret som den tangentielle kraft på en flade divideret med arealet.

$$\eta = G / A$$

Anvender vi de tidligere resultater (3.2) og (3.3), fås:

$$(3.4) \quad \theta = 2 \frac{1 + \sigma}{E} \eta$$

Dette kan også skrives som:

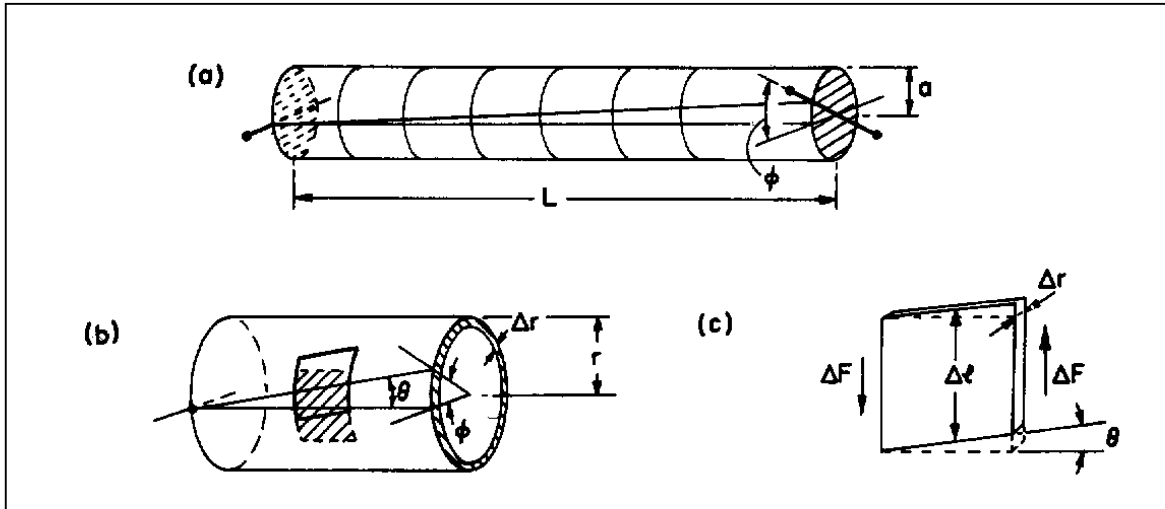
"stress" = konstant gange "strain".

$$(3.4) \quad \eta = \mu \theta$$

Koefficienten μ betegnes i almindelighed (på engelsk) som the *shear modulus*: Den kan udtrykkes ved de andre elastiske konstanter som:

$$(3.5) \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

4. Torsion



Vi skal nu se på et eksempel, som er mere kompliceret, fordi materialets forskellige dele bliver påvirket med forskellige "stress". Først skal vi se på en stang med cirkulært tværsnit, som bliver snoet.

Fra eksperimenter med torsionspendulet ved vi at den vinkel, som tråden bliver snoet er ligefrem proportional med kraftmomentet på pendulet. Proportionalitetskonstanten afhænger af trådens længde og tykkelse samt af materialet af tråden naturligvis.

For en stang, er denne afhængig mere kompliceret, og vi vil godt vide hvordan.

Svaret på dette spørgsmål er mere af geometrisk natur, som vi skal se i det følgende.

Figuren ovenfor viser en stang med cirkulært tværsnit, som har længde L og radius i tværsnittet a , og hvor den ene ende er snoet en vinkel ϕ i forhold til den anden. Vi ønsker at sammenholde de "strain", som det forårsager med hvad vi ved i forvejen. Vi skal dele stangen op i tynde cylindriske skaller, og analysere, hvad der sker i hver enkelt cylindreskal.

Vi ser derfor på en tynd kort cylindreskal med radius r og tykkelse Δr , som vist på figuren ovenfor til venstre. Ser vi på et så lille stykke af denne cylindreskal at det kan betragtes som en lille firkant, kan vi se, at den bliver forvredet til et parallelogram. Hvert sådan lille stykke bliver vredet, og den vinkel det er vredet er:

$$(4.1) \quad \theta = \frac{r\phi}{L}$$

Det torsions "stress" η som materialet er påvirket af er ifølge (3.4).

$$(4.2) \quad \eta = \mu\theta = \mu \frac{r\phi}{L}$$

Torsions stresset er den tangentielle kraft ΔF , der er i enden af det lille stykke af firkanten divideret med arealet $\Delta l \Delta r$ af stykket. (Figuren for oven til højre).

$$(4.3) \quad \eta = \frac{\Delta F}{\Delta l \Delta r}$$

Kraften ΔF på sådan en firkant udøver et kraftmoment $\Delta \tau$ om akse af stangen som er lig med:

$$(4.4) \quad \Delta \tau = r \Delta F = r \eta \Delta l \Delta r$$

Det samlede kraftmoment er derfor summen af alle de kraftmomenter rundt om omkredsen af cylinderen.

Hvis vi samler alle stykkerne så summen af alle Δl 'erne er lig med omkredsen af cylinderskallen $2\pi r$, får vi at det samlede kraftmoment på en cylinderskal bliver:

$$r \eta (2\theta \pi r) \Delta r$$

Anvender vi (4.3)

$$\tau = 2\pi \mu \frac{r^3 \Delta r \phi}{L}$$

Vi finder således at drejnings "stivheden" τ / ϕ af en hul cylinder er proportional med radius i tredje potens, med tykkelsen Δr og omvendt proportional med længden L .

Vi tænker os derefter at stangen er opbygget af cylinderskaller, som hver er snoet den samme vinkel ϕ . Det samlede kraftmoment findes derefter ved integration over radierne r .

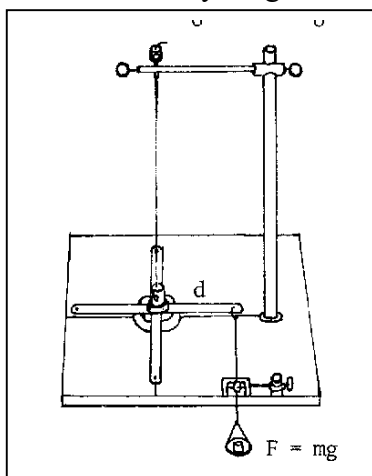
$$\tau = 2\pi \mu \frac{\phi}{L} \int_0^a r^3 dr$$

$$(4.4) \quad \tau = \mu \frac{\pi a^4}{2L} \phi$$

For en stang med cirkulært tværsnit, ses det at kraftmomentet er proportional med torsionsvinklen, med fjerde potens af stangens diameter, og omvendt proportional med stangens længde. En stang som er dobbelt så tyk, har således en stivhed som er 16 gange større.

5. Torsions pendulet og torsionssvingninger.

Vi skal først se på torsionspendulet, som er matematisk simpelt at beskrive, og dernæst se på de matematisk betydelig mere komplicerede torsionsbølger.



Indtil omkring 1980 var torsionspendulet en af de fysiske øvelser som eleverne lavede i gymnasiet i 3g og skrev rapport over.

Forsøget blev udført med et apparat, som vist til venstre.

For torsion gælder den samme simple lovmæssighed (Hookes lov), idet det kraftmoment H , som er nødvendig for at sno tråden en vinkel ϕ er ligefrem proportional med ϕ . Dette udtrykker vi sådan.

$$(5.1) \quad H = D\phi$$

D kaldes for *torsionskoefficienten* eller *direktionsmomentet*.

D afhænger af længden, tykkelsen og af materialet som tråden er lavet af. I modsætning til Hookes lov gælder (5.1) også for større forskydninger, dvs. vinkler, større end 360° , i det mindste for længere og tyndere (piano)tråde.

Hvis pendulet med inertimoment I , der er symmetrisk om den lodrette akse, drejes en vinkel ϕ og slippes, vil pendulet udføre svingninger om den lodrette akse.

Det skyldes at pendulet er påvirket af et kraftmoment: $H = -D\varphi$ fra tråden.
 Ud fra Newtons 2. lov for rotation, vil systemet opfylde differentialligningen.

$$(5.2) \quad H = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \Leftrightarrow -D\varphi = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{I} \varphi$$

Den sidste ligning (5.2) ses at være differentialligningen for en harmonisk svingning, der som bekendt har løsningen:

$$(5.3) \quad \varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha_0), \text{ hvor } \omega = \sqrt{\frac{D}{I}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}$$

Forsøget er ikke rigtig meningsfuldt uden, at man kender torsionskoefficienten D .
 D bestemmes derfor først ved et statisk forsøg. Som vist på tegningen, forbinder man en af pendulets arme med en snor, som via en trisse er forbundet med en skål, hvor man kan anbringe lodder. Tyngden af skål og lodder giver et kraftmoment, som holdes i balance med kraftmomentet fra tråden.

Man kan så plote sammenhørende værdier af (m, φ) ind i et koordinatsystem og aflæse hældningskoefficienten $\alpha = m / \varphi$. Idet, der gælder $mg = D\varphi$ finder man: $D = \alpha g / \varphi$

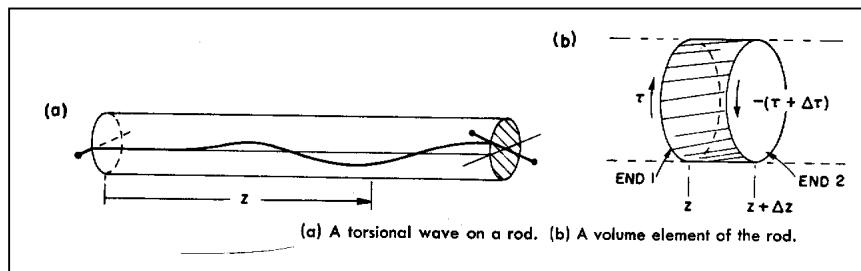
Man kan imidlertid også foretage en dynamisk bestemmelse af direktionmomentet D ud fra formlen (5.3).

Hvis man nemlig anbringer skiver med kendte inertimoment I_1 og I_2 oven på torsionspendulet, og måler svingningstiderne, så finder man, idet inertimomenter er additive:

$$(5.4) \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}} \wedge T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_2}{D}} \Rightarrow D = 4\pi^2 \frac{I_2 - I_1}{T_2^2 - T_1^2}$$

5.1 Torsionsbølger

Vi skal derefter se på de såkaldte torsionsbølger, som udbreder sig i en stang med endelig tykkelse, som illustreret nedenfor.



Lad z være afstanden fra stangens ene endepunkt ned til et punkt på stangen. For en statisk torsion er kraftmomentet det samme overalt og er lig med $D\phi / L$. Den samme torsionsvinkel over hele længden. Det som betyder noget for materialet er den lokale "strain", som er lig med $\partial\phi / dz$, så når torsionen langs med stangen ikke er den samme, skal vi erstatte (4.4) med:

$$(5.5) \quad \tau(z) = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Lad os da se, hvad der sker med et element Δz , som ses forstørret på figuren for oven til højre. Der er et kraftmoment $\tau(z)$, ved "end 1" af den lille stump af stangen og et kraftmoment $\tau(z + \Delta z)$ ved "end 2". Det giver et kraftmoment $\Delta \tau$, som er:

$$\Delta \tau = \tau(z + \Delta z) - \tau(z) = \frac{\partial \tau}{\partial z} \Delta z .$$

Differentierer vi (5.5):

$$\Delta \tau(z) = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Delta z$$

Massen på det lille stykke er $\Delta m = (\pi a^2 \Delta z) \rho$, hvor ρ er densiteten af stangen.

Inertimomentet af en cirkulær skive med masse m er $\frac{1}{2} m v^2$. Kaldet vi inertimomentet af vores lille stump af stangen for ΔI , finder vi:

$$(5.6) \quad \Delta I = \frac{\pi}{2} \rho a^4 \Delta z$$

Ifølge Newtons 2. lov for rotation er kraftmomentet lig med inertimomentet gange vinkelaccelerationen.

$$(5.7) \quad \Delta \tau = \Delta I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Indsætter vi de to udtryk, som vi har opnået for $\Delta \tau$ og ΔI , får vi:

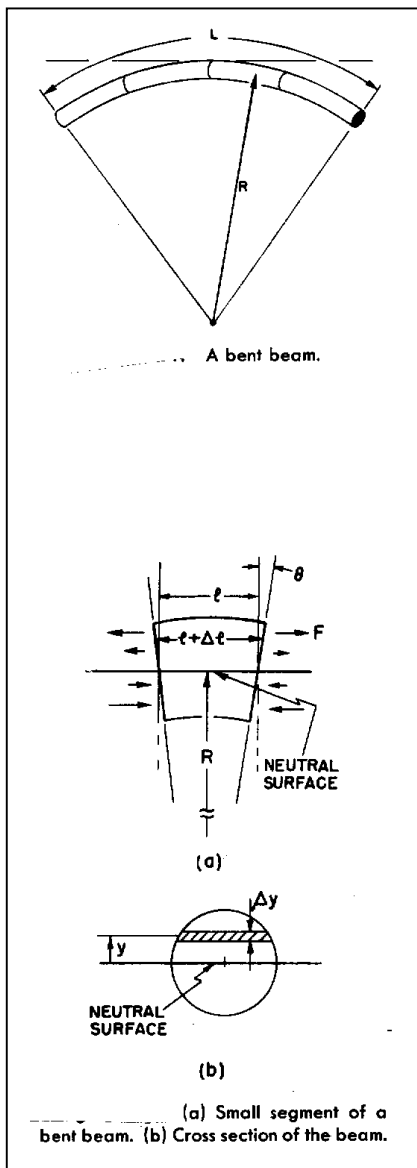
$$\mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Delta z = \frac{\pi}{2} \rho a^4 \Delta z \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$$(5.8) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

Den sidste ligning genkendes som bølgeligningen, svarende til udbredelseshastigheden:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

6. Den bøjede bjælke



Vi skal nu se på bøjning af en bjælke eller en stang, som er et andet eksempel på at anvende lovmæssighederne for elasticitet. Vi begynder med at undersøge, hvilke kræfter, som virker på et tværsnit af stangen. Radius i den buede bjælke er R .

For at gøre det matematiske så simpelt som muligt, skal vi antage at stangen har et cirkulært tværsnit, men det er ingen reel indskrænkning til det generelle tilfælde. Det er dog en forudsætning, at resultaterne kun vil være korrekte, hvis radius af stangen er meget mindre end dets længde.

Hvis man bøjer en bjælke, så vil den følge en kurve, som er vist på figuren til venstre. Idet bjælken er bøjet, vil bjælken blive strakt på oversiden, og presset sammen på undersiden.

Af den grund vil der være en "midte", hvor den hverken er strakt eller trykket sammen. Dette kaldes *den neutrale flade*.

For en ren bøjning, er et lille udsnit af bjælken vist på figuren til venstre (a).

Materialet nedenfor den neutrale flade bliver trykket sammen et "strain", som geometrisk er proportionalt med afstanden til den neutrale flade. Så det langsgående stræk Δl er proportional med højden y . Figur (b). Geometrisk har vi derfor: (Se figurer).

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R}$$

Derfor er det "stress" – kraften per arealenhed – på en smal strimmel ved y også proportional med afstanden til den neutrale flade.

$$(6.1) \quad \frac{\Delta F}{\Delta A} = E \frac{y}{R}$$

Vi vil derefter undersøge hvilke kræfter, der forårsager sådant et "strain".

Kræfterne, som påvirker et lille segment er vist på figur (a). Kræfterne over og under den neutrale flade er modsat rettede, og sammen giver de et moment M som bøjer stangen dvs. et kraftmoment omkring den neutrale flade.

Vi kan udregne det samlede kraftmoment ved at integrere kraften gange afstanden fra den neutrale flade for hvert lille stykke af stangen.

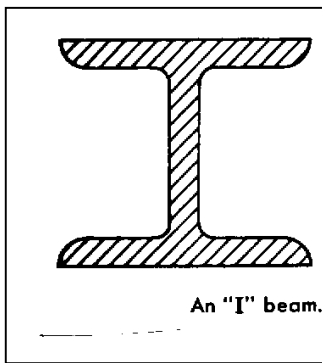
$$M = \int y dF$$

Fra (6.1) har vi: $dF = Ey/R dA$, så

$$(6.2) \quad M = \frac{E}{R} \int y^2 dA$$

Vi kalder integralet af $y^2 dA$ for "inertimomentet" af det geometriske tværsnit om en horisontal akse gennem dets "massemidtpunkt".

$$(6.3) \quad M = \frac{EI}{R} \quad \text{where} \quad I = \int y^2 dA$$



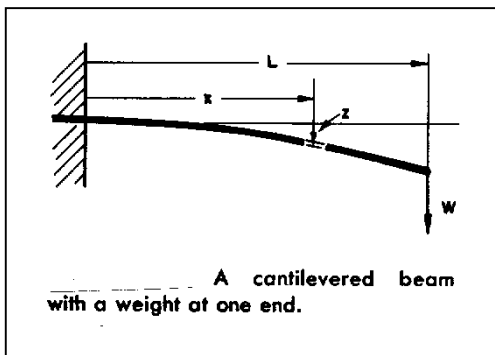
Relationen (6.3) er relationen mellem bøjningsmomentet af bjælken M og krumningen $1/R$ af bjælken.

Stivheden af bjælken er proportional med Youngs modul E og med inertimomentet I .

Det sidste betyder, at hvis man ønsker en stiv bjælke, produceret af en given mængde stof f.eks. Aluminium, så skal man anbringe så meget som muligt så langt fra den neutrale flade som muligt, for at få et så stort inertimoment som muligt.

Dette er noget som er velkendt for de fleste, at jernbjælker udformes som et H , som ligger ned.

Der er begrænsninger i den henseende, naturligvis, da bjælken ellers vil brække eller blive snoet, og dermed ikke længere vil vende tilbage til sin oprindelige form.



Som et andet eksempel på bjælkeligningen (6.3), skal vi bestemme afbøjningen af en "bjælke", der er fastgjort i en mur i den ene ende, og som påvirkes af en kraft F (på figuren W) i den anden.

Vi er interesserede at bestemme den kurve $z = z(x)$, som bjælken følger. Den matematiske formel for krumningen i et punkt af en kurve $z = z(x)$, er:

$$(6.4) \quad \frac{1}{R} = \frac{d^2 z / dx^2}{(1 + (dz / dx)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Idet vi kun er interesserede i moderate krumninger af bjælken, ser vi bort fra kvadratet på differentialkvotienten i nævneren i forhold til 1, så

$$(6.5) \quad \frac{1}{R} = \frac{d^2 z}{dx^2}$$

Vi behøver også bøjningsmomentet M , som er en funktion af x , idet det er lig med kraftmomentet på enhver neutral akse på ethvert tværsnit. Vi ser bort fra tyngden af bjælken, og anvender kun den lodrette kraft på den frie ende af bjælken. Bøjningsmomentet ved x bliver herefter.

$$(6.5) \quad M(x) = F \cdot (L - x)$$

Dette er så det kraftmoment ved x , som udøves af kraften F , lig med det kraftmoment som bjælken må modstå ved x . Vi har da:

$$(6.6) \quad F(L - x) = \frac{EI}{R} = EI \frac{d^2 z}{dx^2}$$

Som giver:

$$(6.7) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{F}{EI} (L - x)$$

Ligning kan integreres til:

$$(6.8) \quad z = \frac{F}{EI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

Hvor vi har anvendt at: $z(0) = 0$ samtidig med at dz/dx også er nul ved $x = 0$.

Dette 3. grads polynomium er da formen af den bøjede bjælke. Forskydningen fra vandret i den

frie ende er:

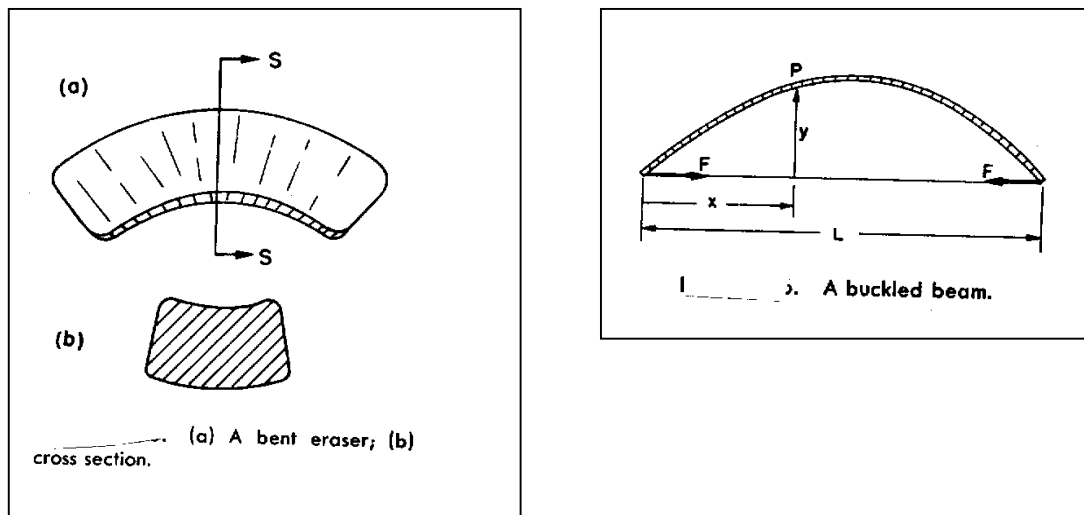
$$z(L) = \frac{F L^3}{EI 3}$$

Dette tredjegrads polynomium er for resten et såkaldt *spline* polynomium, som anvendes til stykkevis gennem 3 punkter at give den mest glatte approksimation til en funktion givet ved n ækvivalente punkter.

Et spline polynomium dækker 3 punkter, som funktionen går igennem. To endepunkter og midtpunktet mellem endepunkterne. Alle tre punkter går gennem en funktionsværdi, mens hældningskoefficienten i et endepunkt er den samme som i det foregående spline polynomium. Fysisk ved vi at dette er tilfældet for den krumme bjælke.

7. Buckling (At knække eller folde)

Vi skal herefter se på "buckling" dvs. knække eller folde en bjælke eller stang.



Vi ser først på situationen vist på figuren til højre. Bemærk at kræfterne nu er *vandrette* og presser bjælken sammen i modsætning til det foregående eksempel, hvor kraften var lodret. Her er vist en bjælke eller stang, som deformeres af pres fra to vandrette kræfter.

Som i det tidligere eksempel, vil vi forsøge at finde størrelsen af kræfterne og formen på den deformerede bjælke.

Lad $y(x)$, være forskydningen fra den lige bjælke, hvor x er afstanden fra en af enderne.

Bøjningsmomentet M ved et punkt P på figuren er lig med kraften F ganget med moment-armen, som er den vinkelrette afstand y .

$$(7.1) \quad M(x) = Fy$$

Ved anvendelse af (6,3), får vi: $\frac{EI}{R} = Fy$

For moderate deformationer, kan vi anvende $1/R = -d^2y/dx^2$ (Minustegnet, fordi krumningen er nedad), hvilket fører til ligningen

$$(7.2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F}{EI} y$$

Men dette er blot differentialligningen for en cosinus eller sinus funktion. Så for moderate deformationer, er formen af bjælken en sinus-funktion. "Bølgelængden" i sinus funktionen ses at være $2L$, Den generelle løsning er:

$$(7.3) \quad y = c \sin \pi x / L$$

Diffferentierer vi (7.3) to gange

$$(7.4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{L^2} y$$

Og sammenligner vi derefter med (7.2), finder vi kraften.

$$(7.5) \quad F = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

Det er bemærkelsesværdigt, som det fremgår af (7.5), så er kraften uafhængig af forskydningen y . Og som en konsekvens af dette følger, at hvis kraften er mindre end F givet ved (7.5), så vil der ikke være nogen bøjning overhovedet. Hvis på den anden side, hvis F er større end i udtrykket (7.5), så vil stangen pludselig få en voldsom bøjning, hvilket betyder at for en kraft, som er større end den "kritiske kraft" $\pi^2 EI / L^2$, (som ofte kaldes for Euler-kraften) vil stangen måske klappe sammen eller knække.

Hvis for eksempel læsset på de bjælker, som holder anden salen i et hus overstiger Euler kraften, så vil bygningen sandsynligvis bryde sammen. Men det er naturligvis noget som bygningsingeniører har vidst i hundrede af år, uden at kende det teoretiske grundlag.

Referencer: The Feynmann Lectures on physics II (1965).
Arnold Sommerfeld: Mechanics of deformable bodies (64).