Dynamik
Mekanikkens love på differentialform

Ole Witt-Hansen

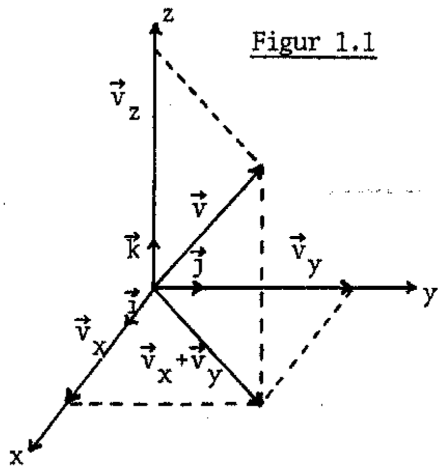
1979 (2016)

KAP. VI DYNAMIK

1. BEVÆGELSE I PLANEN OG I RUMMET.

For bevægelse i planen er nogle fysiske størrelser, som f.eks. hastighed $\vec{v}$ og kraft $\vec{F}$ vektorer. De kan beskrives ved deres koordinater efter to ortogonale retninger. Koordinaterne betegnes normalt x og y koordinat eller (1) og (2) koordinat.

I den rumlige beskrivelse er betegnelsen for vektorerne den samme som i planen, men der kræves tre koordinater til at fastlægge en rumlig vektor. Disse koordinater kaldes normalt for x, y og z koordinat eller (1), (2) og (3) koordinat.



Figur 1.1

Dette svarer til, at et rumligt koordinatsystem har tre ortogonale retninger, repræsenteret ved tre indbyrdes ortogonale basisvektorer $\vec{i}$, $\vec{j}$ og $\vec{k}$.

Hvorledes man fastlægger koordinaterne til en vektor, fremgår af figuren.

Alle de elementære regneregler for vektorer i planen overtages uændret i den rumlige beskrivelse.

Skalarproduktet af to vektorer $\vec{F}$ og $\vec{v}$ og længden af en vektor $\vec{a}$ skrives på følgende måde ved hjælp af rumlige koordinater:

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z \quad \text{og} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

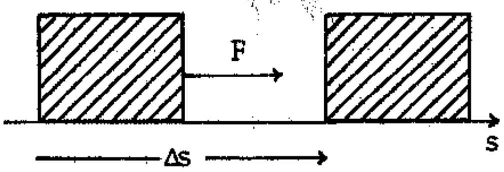
I det store og hele skal vi stadig indskrænke os til at betragte plane bevægelser, men de udledte formler kan overtages uændret i den rumlige beskrivelse.

For indførelsen af visse nye dynamiske størrelser, som kraftmoment og impulsmoment, er den rumlige beskrivelse af vektorer nødvendig. Vi vil dog udelukkende holde os til vektor-regning i rummet, og ikke indføre den noget mere komplicerede koordinatregning i rummet.

Kap VI

2. ARBEJDE.

Figur 2.1



For en retlinet bevægelse gælder, at det arbejde ΔA, som kraften F udfører ved forskydningen Δs er:

(2.2) $\Delta A = F\Delta s$

Formlen gælder under de sædvanlige forudsætninger, nemlig at kraften F er konstant på stykket Δs, og at alle størrelserne regnes med fortegn. For "uendelig små" forskydninger ds kan kraften F altid regnes for konstant, og vi kan derfor generelt skrive udtrykket for det arbejde dA, som kraften F udfører ved forskydningen ds.

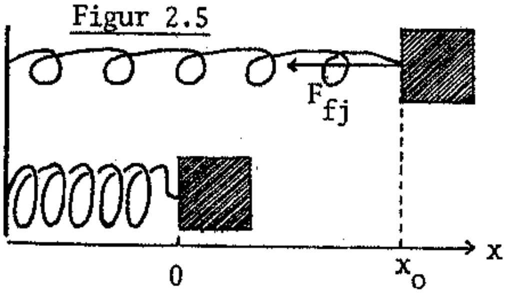
(2.3) $$\boxed{dA = F\,ds \Leftrightarrow \frac{dA}{ds} = F(s) \Leftrightarrow A'(s) = F(s)}$$

F(s) betegner kraften på positionen s.
Ligningerne (2.3) udtrykker, at det udførte arbejde A(s), som funktion af den tilbagelagte vej s, er en stamfunktion til kraften F(s). Regnes arbejdet ud fra positionen s_o, skal der åbenbart gælde at $A(s_o) = 0$. Er $A_1(s)$ er vilkårlig stamfunktion til F(s), kan A(s) åbenbart bestemmes ved: $A(s) = A_1(s) - A_1(s_o)$. Heraf følger, at arbejdet der udføres ved forskydningen fra s til s_o er givet ved:

(2.4) $$\boxed{A = A_1(s) - A_1(s_o) = \left[A_1(s)\right]_{s_o}^{s} = \int_{s_o}^{s} F(s)ds}$$

2.5 Eksempel: Den potentielle energi af en strakt fjeder.

Figur 2.5



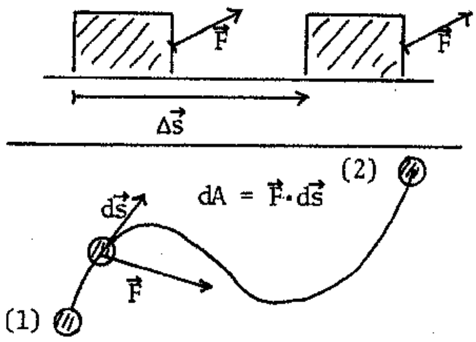
Vi vil udregne det arbejde, som en fjederkraft udfører, når den flytter en masse m fra en yderstilling x_o til den ustrakte stilling ved x=0.
Dette arbejde har vi tidligere defineret som fjederens elastisk potentielle energi, svarende til

en deformation af størrelsen x_o. Udtrykket er kendt fra bind 1, hvor $E_{pot} = \frac{1}{2}kx_o^2$. Dengang blev integralet bestemt som et areal.
Når k betegner fjederkonstanten, er fjederkraften $F_{fj} = -kx$ ved forskydningen x. Der gælder således, at $dA = F_{fj}(x)dx = -kx\,dx$, og det søgte arbejde udregnes som:

$$(2.5.2) \qquad A = \int_{x_o}^{0} -kx\,dx = \left[-\tfrac{1}{2}kx^2\right]_{x_o}^{0} = \tfrac{1}{2}kx_o^2$$

3. ARBEJDE VED EN KRUM BEVÆGELSE.

Figur 3.1 $\quad \Delta A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s}$



Når kraft og forskydning ikke er parallelle, er det arbejde A, som kraften $\vec{F}$ udfører ved forskydningen $\Delta\vec{s}$, lig med skalarproduktet af $\vec{F}$ med $\Delta\vec{s}$.
En krum bevægelse kan tænkes sammensat af en række "uendelig små" retlinede forskydninger $d\vec{s}$.
For arbejdet dA, der udføres ved forskydningen $d\vec{s}$, vil vi skrive:

$$(3.2) \qquad \boxed{dA = \vec{F}\cdot d\vec{s}}$$

For det arbejde, som kraften $\vec{F}$ udfører ved en bevægelse fra position (1) til position (2) vil vi symbolsk skrive:

$$(3.4) \qquad \boxed{A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}\cdot d\vec{s}}$$

Integralet kaldes i dette tilfælde for et kurveintegral. Man siger, at man integrerer $\vec{F}$ langs banekurven fra (1) til (2).
Integralet kan fortolkes som en uendelig sum af alle de arbejder dA_1, dA_2,..., der udføres ved de uendelig små forskydninger $d\vec{s}_1$, $d\vec{s}_2$,...
Hvorledes kurveintegraler generelt skal udregnes, vil vi ikke komme ind på, men nøjes med at udregne nogle simple eksempler.

Kap VI

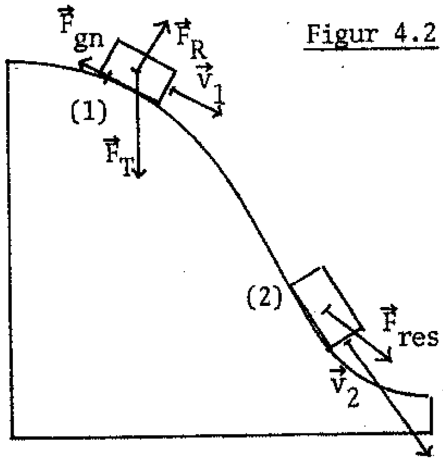
4. KRAFTENS EFFEKT. ARBEJDSSÆTNINGEN.

Divideres ligningen $dA = \vec{F}\cdot d\vec{s}$ på begge sider med tidsrummet dt, fås:

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}} \quad (4.1)$$

$\frac{dA}{dt}$ er lig med arbejdet pr. tidsenhed, som kaldes effekten. Højre side af ligningen $\vec{F}\cdot\vec{v}$ læses ofte som kraftens effekt.

Kraftens effekt udregnes altså som skalarproduktet af kraft og hastighed. Kraftens effekt er specielt nul, når kraft og hastighed er ortogonale. I dette tilfælde er $\frac{dA}{dt} = 0$, og kraften udfører intet arbejde. (Dette er f.eks. tilfældet for centripetalkraften i den jævne cirkelbevægelse).



Figur 4.2

Vi vil nu specielt udregne den resulterende krafts arbejde ved en bevægelse fra en position (1) til en position (2).

Man kan f.eks. forestille sig et legeme, der glider ned ad en rutsjebane. Den resulterende kraft $\vec{F}_{res} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ er lig med vektorsummen af tyngden $\vec{F}_T$, gnidningskraften $\vec{F}_{gn}$ og reaktionskraften $\vec{F}_R$. Af (4.1) finder man nu:

$$\vec{F}_{res}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}_{res}\cdot\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}mv^2) \quad (4.3)$$

Ud fra dette resultat kan vi udregne den resulterende krafts arbejde:

$$A_{res} = \int_{(1)}^{(2)}\vec{F}_{res}\cdot d\vec{s} = \int_{(1)}^{(2)}\frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}mv^2)dt = \left[\tfrac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} \quad (4.4)$$

I (4.4) har vi indsat legemets hastigheder v_1 og v_2 på positionerne (1) og (2). Heraf finder man sluttelig:

$$\boxed{A_{res} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{(1)}^{(2)}\vec{F}_{res}\cdot d\vec{s} = \Delta E_{kin}} \quad (4.5)$$

Ligningen (4.5) udtrykker, at den resulterende krafts arbejde er lig med tilvæksten i kinetisk energi.

Dette kaldes for arbejdssætningen.
Vi har tidligere vist arbejdssætningen for en retlinet bevægelse, men den gælder helt generelt.

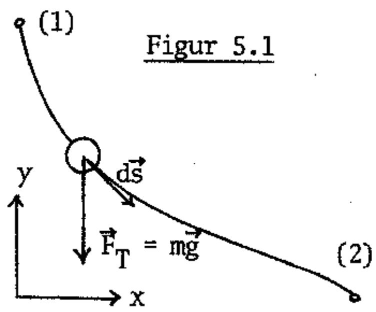
5. KONSERVATIVE KRAFTFELTER OG POTENTIEL ENERGI.

Ved et kraftfelt forstår man egentlig blot en situation, hvor kraften på et legeme er fastlagt i ethvert punkt af rummet eller i ethvert punkt af en plan eller på en linie.
Typiske kraftfelter er elektriske felter og tyngdefeltet, men også en fjederkraft kan danne et (éndimensionalt) kraftfelt.
Skal man udregne en krafts arbejde ved en forskydning fra positionen (1) til positionen (2), findes der i almindelighed uendelig mange veje, langs med hvilke arbejdet kan udregnes, og arbejdet vil i almindelighed afhænge af den valgte vej.

Kraftfeltet kaldes for konservativt, hvis feltkraftens arbejde ved bevægelsen fra position (1) til position (2) kun afhænger af de to positioner, men ikke af den valgte vej mellem de to positioner.

Elektriske felter, tyngdefeltet og fjederkraftfelt er alle eksempler på konservative kraftfelter, mens gnidningskræfter er typiske ikke konservative kraftfelter. Trækker man f.eks. en kasse hen over et plant underlag, er arbejdet jo proportionalt med længden af den valgte vej.

5.1 Eksempel. Tyngdekraftens arbejde.



Figur 5.1

*Som eksempel skal vi udregne det arbejde, som tyngdekraften udfører på et legeme med masse m, der flyttes fra (1) til (2) langs den viste kurve.
Arbejdet kan udtrykkes ved kurveintegralet:*

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}_T \cdot \vec{ds}$$

Kap VI

I tyngdefeltet er $\vec{F}_T = (0,-mg)$ og $\vec{ds} = (dx,dy)$ med det valgte koordinatsystem, så i dette tilfælde lader integralet sig nemt udregne.

$$(5.1.1) \qquad A = \int_{(1)}^{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_{(1)}^{(2)} -mg\, dy = -(mgy_2 - mgy_1) = -\Delta E_{pot}$$

Det udregnede arbejde er åbenbart uafhængig af den valgte vej, og er lig med minus tilvæksten i legemets potentielle energi, hvor E_{pot} er defineret på sædvanlig måde som mgy.

Helt generelt defineres i et vilkårlig konservativt kraftfelt en størrelse, som kaldes den potentielle energi efter følgende retningslinier.
Tilvæksten i potentiel energi, som et legeme får ved en bevægelse fra en position (1) til en position (2), skal være lig med minus det arbejde, som feltkraften udfører på legemet ved flytningen fra (1) til (2).

$$(5.2) \qquad \boxed{\Delta E_{pot} = E_{pot}(2) - E_{pot}(1) = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{F}_{felt} \cdot \vec{ds}}$$

Da feltkraften er konservativ, afhænger integralet ikke af den valgte vej mellem (1) og (2).
Når feltkraften er kendt, fastlægger (5.2) funktionen E_{pot} i enhver position, når den blot er kendt i en enkelt position.
E_{pot} fastlægges da som regel fuldstændig, ved at man vælger et nulpunkt for potentiel energi. Nulpunktet kan principielt vælges vilkårlig, men valget træffes normalt således at udtrykket for E_{pot} bliver så simpelt som muligt.
Vælges i ligningen (5.2) positionen (2) som nulpunkt for E_{pot}, vil man, (idet man benytter at $E_{pot}(2) = 0$, og sætter (2) = (0)), finde:

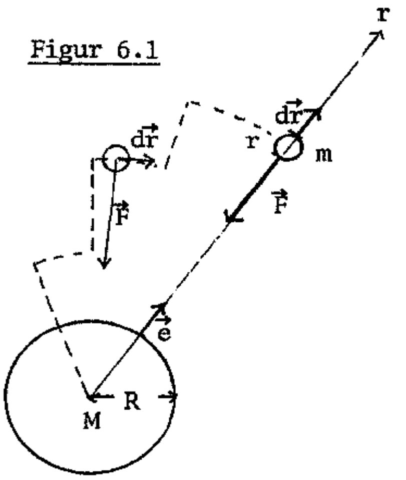
$$(5.3) \qquad \boxed{E_{pot}(1) = \int_{(1)}^{(0)} \vec{F}_{felt} \cdot \vec{ds}}$$

(5.3) er at opfatte som en definitionsligning for potentiel energi:

Ved et legemes potentielle energi i positionen (1) af et konservativt kraftfelt forståes det arbejde, som feltkraften udfører, når legemet føres fra positionen til nulpunktet for potentiel energi.

6. DEN POTENTIELLE ENERGI I TYNGDEFELTET.

Figur 6.1



Ud fra definitionen (5.3) vil vi nu udregne den potentielle energi af et legeme med masse m, der befinder sig i afstanden r fra et centrallegme med massen M.
Det kan f.eks. være den potentielle energi af en satellit, der kredser i afstanden r fra jordens centrum.
Feltkraften $\vec{F}$ er ifølge Newtons gravitationslov Kap III side 46:

(6.2) $$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}$$

Vi vil ikke i detailler bevise, at et kraftfelt af denne form er konservativt, men blot bemærke, at en forskydning vinkelret på en radie ikke kan give noget bidrag til feltkraftens arbejde, da feltkraft og forskydning vil være ortogonale. Vi kan derfor nøjes med at udregne feltkraftens arbejde langs en radie.
Nulpunktet for potentiel energi vil vi vælge uendelig langt borte fra centrallegemet, d.v.s. for $r = \infty$.
Retningen af vektorerne $\vec{F}$, $\vec{e}$ og $d\vec{r}$ fremgår af figuren. Heraf fås ifølge (5.3):

(6.3) $$E_{pot}(r) = \int_r^\infty -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}\cdot d\vec{r} = -GMm\int_r^\infty \frac{1}{r^2}dr = -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty$$

Når man indsætter øvre grænse giver det nul. Hermed finder man:

(6.4) $$\boxed{E_{pot}(r) = -G\frac{Mm}{r}}$$

Udtrykket gælder, når r er større end radius R af centrallegemet.

Kap VI

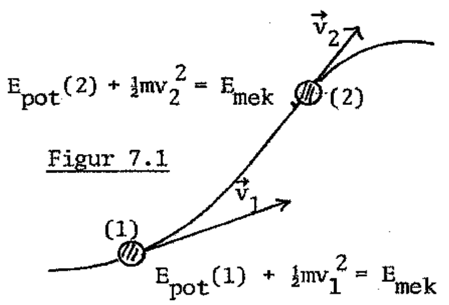
Udtrykket (6.4) ser umiddelbart ret forskelligt ud fra det kendte udtryk for potentiel energi i tyngdefeltet $E_{pot} = mgh$.
Udtrykket mgh er imidlertid udledt ud fra den antagelse, at feltkraften er konstant, og $E_{pot} = mgh$ er derfor en tilnærmelse, der kun gælder nær jordens overflade.
For at undersøge overensstemmelsen, udregner vi ud fra (6.4) den tilvækst i potentiel energi et legeme får, når det løftes stykket h over jordoverfladen. Jordradius sættes lig med R.

$$(6.5) \qquad \Delta E_{pot} = E_{pot}(R+h) - E_{pot}(R) = -G\frac{Mm}{R+h} - (-G\frac{Mm}{R})$$

$$= -GMm(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}) = -GMm(\frac{-h}{(R+h)R}) \approx G\frac{Mm}{R^2}h$$

I den sidste tilnærmelse har vi sat $R+h \approx R$, som gælder, når $h << R$.
Vi har i kap III side 48 fundet at tyngdeaccelerationen $g = GM/R^2$
Indsættes dette i det sidste udtryk af (6.5), genfinder vi, at den potentielle energi nær jordoverfladen kan udtrykkes som: $\Delta E_{pot} = mgh$

7. ENERGIBEVARELSE I ET KONSERVATIVT KRAFTFELT.



Figur 7.1

Vi betragter nu det tilfælde, hvor et legeme med masse m bevæger sig frit i et konservativt kraftfelt, således at den resulterende kraft på legemet er lig med feltkraften.
Ved at sammenholde (4.5) $A_{res} = \Delta E_{kin}$ med (5.2) $A_{feltkraft} = -\Delta E_{pot}$ får man:

$$(7.2) \qquad A_{res} = A_{feltkraft} \Leftrightarrow \Delta E_{kin} = -\Delta E_{pot} \Leftrightarrow \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0$$

Ligningen (7.2) udtrykker noget meget centralt. Vi ved nemlig, at når summen af tilvæksterne på den kinetiske og potentielle energi er nul, betyder at den mekaniske energi $E_{mek} = E_{kin} + E_{pot}$ er konstant.

Heraf følger den vigtige sætning:
I et konservativt kraftfelt er den mekaniske energi bevaret.
Indsætter man $\Delta E_{pot} = E_{pot}(2) - E_{pot}(1)$ og $\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$ i (7.2) og samler leddene med samme index på hver side af ligningen fås:

(7.3) $$\boxed{E_{pot}(2) + \tfrac{1}{2}mv_2^2 = E_{pot}(1) + \tfrac{1}{2}mv_1^2}$$

Summen af kinetisk og potentiel energi er den samme i positionerne (1) og (2). Dette er den sædvanlige måde at udtrykke energibevarelsen på.
Vi har allerede set flere eksempler på energibevarelse i et konservativt kraftfelt. F.eks. ved det skrå kast og ved den harmoniske svingning, hvor vi i begge tilfælde ved direkte udregning fandt, at summen af kinetisk og potentiel energi er konstant.
Typiske ikke konservative kræfter er gnidningskræfter. Hvis der optræder gnidningskræfter, må (7.2) modificeres derhen, at tilvæksten i mekanisk energi er lig med gnidningskræfternes arbejde.

(7.4) $$A_{gnidning} = \Delta E_{mek} = \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin}$$

8. ENERGIBEVARELSE I JORDENS TYNGDEFELTET.

Ved en satellitbevægelse i jordens tyngdefelt gælder der energibevarelse, da jordens tyngdefelt er konservativt.
(Når det alligevel jævnligt sker, at der falder gamle satelitter og udbrændte rumstationer ned i hovedet på os, skyldes det at de systematisk, men næsten umærkeligt bremses i deres baner af den partikelstrøm, der er i verdensrummet).
Energibevarelsen for en satellit med masse m, der bevæger sig i afstanden r fra jordens centrum, kan udtrykkes:

(8.1) $$E_{mek} = E_{kin} + E_{pot} = \tfrac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

Denne energibevarelse kan også anvendes til at beregne den hastighed, som et rumskib skal opsendes med for at undslippe jordens tyngde-

8

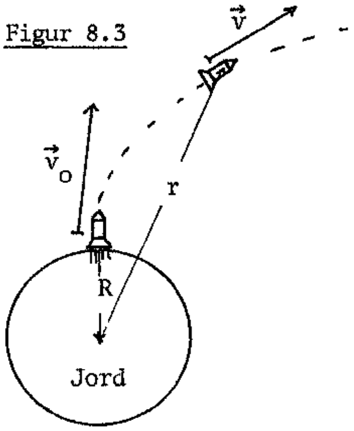
Kap VI

felt. Opsendes et rumskib med begyndelseshastigheden v_o fra jordens overflade ($r = R$), er den mekaniske energi af rumskibet:

$$E_{mek} = \tfrac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{Mm}{R} \tag{8.2}$$

Denne energi er den samme under hele bevægelsen.

Figur 8.3



Vi vil da beregne den mindste hastighed, som rumskibet må have for at undslippe tyngdefeltet. Hertil bemærker vi, at et legeme der bevæger sig udenfor jordens tyngdefelt, (hvor $E_{pot}(r) = 0$, da $r \simeq \infty$), må have en positiv mekanisk energi, idet $E_{mek} = E_{kin}$. Da der gælder energibevarelse, må energien ved opsendelsen også være positiv for at rumskibet undslipper tyngdefeltet.

$$E_{mek} \geqq 0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{Mm}{R} \geqq 0 \Leftrightarrow v_o \geqq \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{8.4}$$

Indsætter man værdierne for gravitationskonstanten G, jordens masse M og jordradius R, finder man:

$$v_o \geqq \sqrt{\frac{2\,6{,}67\,10^{-11}\,5{,}98\,10^{24}}{6{,}37\,10^{6}}}\ \text{m/s} = 11{,}2\,10^{3}\ \text{m/s} = 11{,}2\ \text{km/s}$$

Rumskibet vil iøvrigt undslippe ligegyldigt om det opsendes lodret eller med anden vinkel med jordoverfladen.