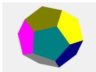
# Dødsdromen
# og
# lignende dynamiske problemer



Ole Witt-Hansen 2018

Indhold

## 1. Hvordan kan man køre på en lodret cirkulær væg uden at falde ned

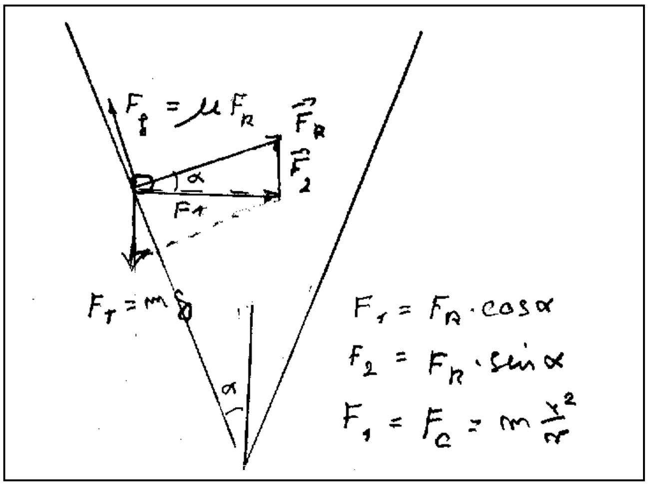
Da jeg var barn (for omkring 60 år siden), var der omrejsende tivoli, hvor der blandt andet var kørsel i en dødsdrom. For en dreng på 12 år havde sådan et navn naturligvis en ikke helt ubetydelig tiltrækning. Jeg betalte en entre, og inden i teltet var der opbygget en gigantisk lodret cylinder af træ, hvor siderne var forstærket med solide træ stræbere hele vejen rundt.

Showet blev indledt med at en enkelt mand på motorcykel, kørte rundt i bunden for derefter at speede op ad en skrå cirkulær rampe i bunden for endelig at køre med stor fart næsten vandret rundt i cylinderen.
Motorcyklen osede og det bragede i træet og det var helt fantastisk. Bagefter blev kørslen gentaget af en anden, som også kørte uden at holde på styret, eller lå ned på motorcyklen. Endelig kørte to motorcykler samtidig, som overhalede hinanden, og til slut var der en lille racerbil, der susede rund på den lodrette væg. Begejstringen ville naturligvis ingen ende tage.

Dengang tænkte jeg ikke så meget i baner af Newtons mekanik, men jeg synes alligevel, at det var underligt at de ikke faldt ned. Forklaringen, at de blev presset så meget mod væggen, at de ikke faldt ned er sådan set god nok, men det ville være bedre at udlede sammenhængen mellem radius i rotunden, hastigheden og en eventuel friktionskraft mellem hjulene og cylinderens træ væg.
Jeg mener at vide, at dødsdromen, som markedsunderholdning blev forbudt i 2011, men på YouTube findes der en optagelse lavet på Christiania i 2010.

Før vi laver analysen af kørsel i dødsdromen, skal vi se på et andet eksempel, som viser sig at være fysisk ækvivalent, men som er lettere at analysere.

### 1.1 Kugle, som udfører en vandret cirkelbevægelse i en kegle.




Vi betragter en kugle, som udfører en vandret cirkelbevægelse på indersiden af en kegle. Keglens halve åbningsvinkel er α.
Vi antager i første omgang, at der ikke er nogen friktion mellem kugle og indersiden af keglen.
Kuglen er i dette tilfælde kun påvirket af tyngdekraften $F_T = mg$ og reaktionskraften fra keglen $F_R$. Resultanten af de to kræfter ses at være den vandrette

$$F_1 = F_2 / \tan\alpha = mg / \tan\alpha$$

Når kuglen udfører en jævn cirkel bevægelse, er den resulterende kraft lig med centripetalkraften:

(1.1) $$F_1 = F_c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mg}{\tan\alpha} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{rg}{\tan\alpha}$$

Hvis vi sætter $r = 0{,}5\ m$, og $\alpha = 30^0$ (som svarer til en højde $h = r/\tan 30 = 0{,}87$ m), så finder man:

$$v = \sqrt{\frac{rg}{\tan\alpha}} = 2{,}9\ m/s\ .$$

Vi kan imidlertid se, at hastigheden går imod uendelig, når vinklen α nærmer sig til 0, og vi slutter derfor, at det ikke er muligt at opretholde en jævn cirkelbevægelse på en lodret væg, hvilket næppe er overraskende. For at det skal kunne lade sig gøre må der tilføres en gnidningskraft, som virker langs med keglen. Cirkelbevægelsen antages derimod at være en ren rulning.

Friktionskraften er: $F_f = \mu F_N$, hvor μ er friktionskoefficienten og $F_N$ er normalkraften , som i dette tilfælde er lig med reaktionskraften $F_R$.

$$F_R = \frac{F_c}{\cos\alpha} = \frac{mv^2}{r\cos\alpha} \quad \text{og dermed} \quad F_f = \mu F_R = \frac{\mu F_c}{\cos\alpha} = \frac{\mu m v^2}{r\cos\alpha}$$

For at den lodrette komposant af kraften på kuglen skal være nul, må der derfor gælde:

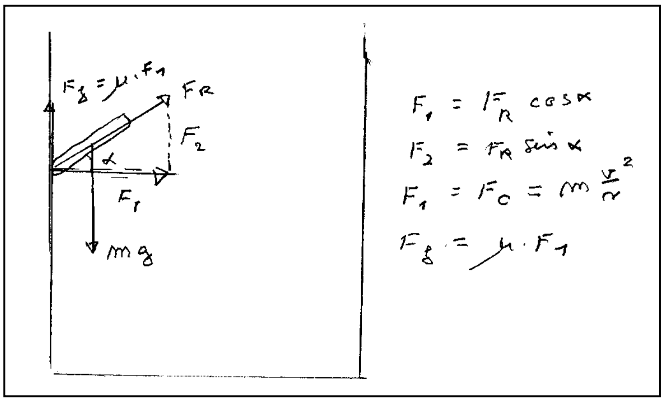
$$F_R \sin\alpha + \mu F_R \cos\alpha = mg \qquad F_R(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = mg$$

(1.2) $$\frac{mv^2}{r\cos\alpha}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = mg \quad \Leftrightarrow \quad v^2(\tan\alpha + \mu) = rg \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = \frac{rg}{\tan\alpha + \mu}$$

Det fremgår heraf, at det kun er nødvendig med en lavere hastighed for at opretholde bevægelsen, og at det er fysisk muligt, at opretholde en cirkelbevægelse mod en lodret cirkulær væg.

Hastigheden bliver i dette tilfælde $v^2 = \dfrac{rg}{\mu}$

## 1.2 Dødsdromen. Bevægelse i en lodret cylinder




Vi skal dernæst se på en motorcykel, der bevæger sig i en cirkelbevægelse i en lodret cylinder, som det er tilfældet med kørsel i en dødsdrom.

Motorcyklen (her kun tegnet et hjul) er som før påvirket af tyngden: og reaktionskraften fra væggen. Vi antager først, at der ikke er nogen gnidningskraft, og at hjulet danner en vinkel α med vandret, so vist på figuren. Uden gnidning er den *resulterende kraft* lig med vektorsummen af reaktionskraften $F_R$ og tyngden $F_T = mg$. Hvis motorcyklen udfører en jævn cirkelbevægelse er den resulterende kraft lig med centripetalkraften $F_c = \dfrac{mv^2}{r}$.

Af figuren ses at $F_c = F_1 = F_R\cos\alpha$ . Hvis summen af kræfterne i lodret retning skal være lig med 0, skal der gælde: $F_2 = mg \quad \Leftrightarrow \quad F_R \sin\alpha = mg$ . Indsættes: $F_R = \dfrac{F_c}{\cos\alpha} = \dfrac{mv^2}{r\cos\alpha}$ ,

finder vi derfor:

(1.3) $$\frac{mv^2}{r\cos\alpha}\sin\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{rg}{\tan\alpha}$$

Hvilket er nøjagtig den samme betingelse, som med kuglen i keglen. Vi ser, at heller ikke i dette tilfælde, er en vandret bevægelse mulig (α = 0).
Hvis vi antager, at motorcyklen danner en vinkel $\alpha = 10^0$ med vandret og radius i cylinderen er 5,0 *m*, kan vi udregne den nødvendige hastighed.

$$v = \sqrt{\frac{rg}{\tan\alpha}} = 16.8\ m/s = 60.6\ km/h\,.$$

Hvilket må siges at være en alt for voldsom hastighed.

Hvis man ser på optagelser af kørsel i dødsdrom, så ser det ud som om motorcyklerne ligger vandret, og hvad angår de små racerbiler, så er de naturligvis lodrette. Vi bliver derfor nødt til at tilføje en friktionskraft for at forklare fænomenet.
Den resulterende kraft er nu vektorsummen af tyngden $F_T$, reaktionskraften $F_R$ og friktionskraften $F_f$, og vi ved at et legeme, der udfører en jævn cirkelbevægelse er den resulterende kraft rettet mod centrum og lig med: $F_c = \frac{mv^2}{r}$.
Af figuren fremgår det at $F_c = F_1 = F_R \cos\alpha$. Normalkraften $F_N = F_c$, så friktionskraften $F_f = \mu F_c$
Summen af kræfterne i lodret retning skal være 0.

(1.4) $$F_2 + F_f = mg \quad \Leftrightarrow \quad F_R\sin\alpha + \mu F_c = mg \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mv^2}{r\cos\alpha}\sin\alpha + \frac{\mu m v^2}{r} = mg$$
$$\frac{v^2\tan\alpha}{r} + \frac{\mu v^2}{r} = g \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{rg}{\tan\alpha + \mu}$$

Vi noterer os at betingelsen er den samme, som vi opnåede for kuglen i keglen.

Antager vi at α = 0, $r$ = 5,0 *m* og μ = 1, finder vi for hastigheden: $v = \sqrt{rg} = 7{,}0\ m/s = 25{,}2\ km/h$

De udregnede hastigheder, svarer til den mindste hastighed, hvor cirkelbevægelsen er mulig. En forøget hastighed, vil blot forøge reaktionskraften og friktionskraften.

Selvom summen af de lodrette kræfter er nul, vil tyngden alligevel have et moment omkring kontaktpunktet med væggen. $\vec{H} = \vec{r}_G \times m\vec{g}$, hvor $r_G$ er afstanden fra massemidtpunktet til kontaktpunktet. Dette moment vil dreje motorcyklen om en vandret akse.

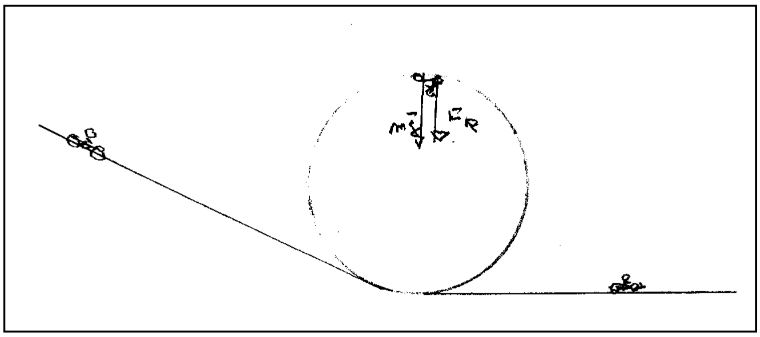
Selv om retningen af $H$ drejer $360^0$ ved kørsel en omgang, så vil den relativt til motorcyklen have den samme retning.
Forklaringen på, hvorfor det ikke får nogen indflydelse, skal søges i det samme fænomen, som gør sig gældende, når en snurretop ikke vælter, når den roterer om en ikke lodret akse i tyngdefeltet.

Når motorcyklen roterer, har den et stort lodret impulsmoment med hensyn til omdrejningsaksen: $\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$ . Kraftmomentet fra tyngden, vil i tidsrummet $\Delta t$ give et langt mindre bidrag $\Delta\vec{L} = \vec{r}_G \times m\vec{g}\Delta t$, så det samlede impulsmoment er $\vec{L}_0 + \Delta\vec{L}$.
Dette vil, som det også gælder for snurretoppen ikke betyder at motorcyklen vælter, men derimod at impulsmomentet præcesserer om en lodret akse.
Vinkelhastigheden I præsessionen, kan I dette tilfælde beregnes af: $\Omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta L / \Delta t}{L_0}$ .
Benytter vi værdierne $r$ = 5,0 *m*, m = 200 *kg*, $v$ = 10 m/s and $r_G$ = 1,0 *m*. finder vi for vinkelhastigheden i præcessionen: 0,2 *rad/s*.
Dette vil køreren af motorcyklen naturligvis mærke og må korrigere med styret.

Så kraftmoment fra tyngden vil ikke betyde at motorcyklen vælter, men derimod en svag præcession af baneplanen. Hvis derimod at motorcyklen stod stille fastholdt til væggen, ville den vælte på samme måde som en snurretop vælter, når den ikke roterer (hurtigt nok)
Vi har hermed vist, at kørsel i en dødsdrom faktisk kan forklares ved anvendelse af den klassiske mekanik.

## 1.3. Looping the loop

I en del forlystelsesparker findes der rutsjebaner, hvor en vogn gennemfører en lodret cirkelbevægelse.
Hvorfor falder de ikke ned? Det gør de også hvis hastigheden i det øverste punkt ikke er tilstrækkelig stor. Noget som de fleste har en fornemmelse af, hvis de f.eks. har forsøgt at svinge et lod rundt i en lodret cirkel. Se figuren nedenfor:



I den øverste position er vognen påvirket af tyngden $F_T = mg$ og reaktionskraften fra skinnen $F_R$.
Begge kræfter har i den øverste position den samme retning.

Disse to kræfter leverer tilsammen den for cirkelbevægelsen nødvendige centripetalkraft, hvor,

$$F_c = \frac{mv^2}{R}.$$

Betingelsen for at vognen bliver på skinnen er at $F_R > 0$ , altså:

(1.5) $$F_R = F_c - F_T > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mv^2}{R} - mg > 0 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 > Rg$$

For et hjul med radius $R$ = 5 *m*, giver det den beskedne hastighed: $v = \sqrt{Rg} = 7{,}0\ m/s = 25\ km/h$

For et hjul med radius $R$ = 10 *m*, giver hastigheden: $v = \sqrt{Rg} = 10\ m/s = 36\ km/h$

Hvis vi ønsker at beregne fra (mindst) hvilken højde vognen skal startes for at gennemføre et loop, ser vi på energien i den øverste position:

(1.6) $$E = E_{kin} + E_{pot} = \tfrac{1}{2}mv^2 + mg2R \ .$$

I grænsetilfældet $F_R = 0$ er imidlertid $\dfrac{mv^2}{R} = mg \quad \Rightarrow \ \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mgR$

Så energien er $E = E_{kin} + E_{pot} = \tfrac{1}{2}mv^2 + mg2R = \tfrac{1}{2}mgR + mg2R = \tfrac{5}{2}mgR : \ \tfrac{5}{2}mgR$ .

For at gennemføre loop'et skal vognen startes i en højde som er mindst $\tfrac{5}{2}R$ .

Loop med en vogn er beskrevet mere detaljeret i:
Elementær Fysik 2, plane bevægelser, jævn cirkelbevægelse