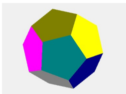
Dæmpet harmonisk svingning.
Tvungne svingninger

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk



Ole Witt-Hansen 2008

5. Dæmpet harmonisk svingning

En harmonisk svingning er en retliniet bevægelse (langs en x-akse), hvor den resulterende kraft er proportional med afstanden til ligevægtsstillingen (x=0) og til stadighed rettet mod ligevægtsstillingen. Der gælder altså ligningen

(5.1) $$F_{res} = -k \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Sætter man $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, finder man den fuldstændige løsning:

(5.2) $$x = A\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

A er amplituden, ω kaldes den cykliske frekvens, og φ_0 er begyndelsesfasen.

Svingningstiden er givet ved udtrykket: $T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

I matematik undervisningen skriver man den fuldstændige løsning til (5.1) på en lidt anden måde:

$$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$$

At dette faktisk er den samme løsningsformel, kan indses, idet man anvender additionsformlen

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

på løsningen (5.2)

$$x = A\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = A\cos(\varphi_0)\cos(\omega \cdot t) - A\sin(\varphi_0)\sin(\omega \cdot t)$$

og sætter $c_1 = A\cos(\varphi_0) \;\; og \;\; c_2 = -A\sin(\varphi_0)$,

som har løsningerne: $\tan\varphi = -\frac{c_2}{c_1} \quad og \quad A = \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}$, finder man det samme udtryk.

Hvis der er friktion i bevægelsen, skal der tilføjes endnu et led til differentialligningen (5.1). Vi vil først gøre den antagelse, at friktionen er proportional med og modsat rettet hastigheden. Proportionalitetskoefficienten vil afhænge af hvilket legeme, der er tale om, og hvilket medium (væske, luft) den bevæger sig i.

$$F_{gn} = -\alpha \cdot v \quad => \quad F_{gn} = -\alpha\frac{dx}{dt} \; .$$

Differentialligningen for bevægelsen bliver herefter:

(5.3)
$$F_{res} = -k \cdot x + F_{gn} \quad \Leftrightarrow$$
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha\frac{dx}{dt} - kx \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Det viser sig noget mere besværligt, at løse differentialligningen (5.3) end (5.1).
Før vi går i gang, omskriver vi ligningen for at få et mere generelt udtryk:

(5.4) $$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + c \cdot x = 0 \quad \text{hvor} \quad b = \frac{\alpha}{m} \quad og \quad c = \frac{k}{m}$$

(5.4) er en 2. ordens, lineær, homogen differentialligning med konstante koefficienter *b* og *c*. Lineær, fordi alle led, der indeholder *x* optræder i 1. potens. Homogen, fordi der ikke er noget led, som afhænger eksplicit af *t*.

5.1 Løsning af differentialligningen ved hjælp af komplekse tal

Ligningen (5.2) kan altid løses, idet løsningen kan reduceres til at finde de komplekse løsninger til en 2. grads ligning. Tilsvarende kan løsning af en *n*-te ordens lineær, homogen differentialligning med konstante koefficienter, reduceres til at bestemme de komplekse rødder i et *n*'te grads polynomium.

Selv om komplekse tal ikke er en del af gymnasiets pensum i matematik, vil vi alligevel vise metoden, fordi den er enkel og effektiv.
For at løse ligningen (5.4) sætter vi $x = e^{z \cdot t}$ hvor *z* er et komplekst tal. Det følger så:

$$\frac{dx}{dt} = z \cdot e^{z \cdot t} \quad og \quad \frac{d^2x}{dt^2} = z^2 \cdot e^{z \cdot t}$$

Indsættes dette i (5.4) og bortforkorter man $e^{z \cdot t}$ får man 2.gradsligningen:

$$z^2 + b \cdot z + c = 0$$

Diskriminanten: $d = b^2 - 4 \cdot c$. Hvis $d > 0$ har 2. gradsligningen de to reelle løsninger.

(5.5) $$z = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot c}}{2} \ \vee \ z = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot c}}{2}$$

Vender vi tilbage til den oprindelige differentialligning, ses det, at $c = k/m > 0$, så begge løsninger i (5.5) er negative. (Hvis $d = 0$) reduceres det til en løsning.

Hvis $d < 0$ har 2. gradsligningen ingen reelle løsninger, men til gengæld de to komplekse løsninger:

(5.5) $$z=-\frac{b}{2}+i\frac{\sqrt{4\cdot c-b^2}}{2} \;\vee\; z=-\frac{b}{2}-i\frac{\sqrt{4\cdot c-b^2}}{2}$$

Her er *i* den komplekse enhed. i^2=-1.

I teorien for komplekse funktioner er formlen nedenfor (Eulers ligning) en af de vigtigste formler (faktisk en af de vigtigste formler i den matematiske analyse overhovedet).
Hvis $z=x+i\cdot y$ er et kompleks tal, hvor *x* og *y* er reelle, gælder der nemlig:

(5.6) $$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

Vi er (naturligvis) kun interesseret i den reelle del af løsningen til differentialligningen (5.4).
Vi bemærker endvidere, at da vi foretog substitutionen $x=e^{z\cdot t}$, kunne vi lige så godt have skrevet $x=Ae^{z\cdot t+i\varphi_0}$. Hermed får vi to integrationskonstanter *A* og φ_0. Sætter vi endvidere $\omega=\frac{\sqrt{4\cdot c-b^2}}{2}$ kan vi skrive løsningen til differentialligningen (5.4) på følgende form

(5.7) $$x(t)=Ae^{-\frac{b}{2}\cdot t}\cos(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

Man ser, at løsningen er en harmonisk svingning med en amplitude, der aftager eksponentielt med tiden. Dette kaldes en dæmpet harmonisk svingning. Indsættes de oprindelige værdier for *b* og *c*

$$b=\frac{\alpha}{m}\;\; og \;\; c=\frac{k}{m}\;,$$

hvor α er viskositetskoefficienten i ligningen: $F_{gn}=-\alpha\cdot v$ og *k* er "fjederkonstanten", finder man udtrykket:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

som indsat giver:

(5.8) $$x(t)=Ae^{-\frac{\alpha}{2m}\cdot t}\cos(\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{4m^2}}\cdot t+\varphi_0)$$

Forudsætningen for denne løsning er, at det som står under kvadratrodstegnet er positivt. I modsat fald, (diskriminanten *d* ovenfor er negativ), vil der aldrig komme en svingning i gang, men udsvinget vil nærme sig eksponentielt til ligevægtsstillingen.
Man bemærker i øvrigt, at når α =0, går løsningen over i det tidligere udtryk for en harmonisk svingning:

5.2 Traditionel løsning af differentialligningen

(5.9) $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

Som tidligere omskriver vi ligningen for at få et mere generelt udtryk:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+c\cdot x=0 \quad \text{, hvor } b=\frac{\alpha}{m} \quad og \quad c=\frac{k}{m}$$

Differentialligningen kan dog også løses på traditionel vis, men metoderne er lidt forskellige.
Den anvendte metode her, er i familie med den, der bruges, når man løser 1. ordens differentialligning.
Man indfører en hjælpefunktion til at omskrive differentialligningen til én, som vi kan løse, nemlig differentialligningen for den harmoniske svingning :

(5.10) $$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k}{m}y=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0,$$

som har løsningen:

(5.11) $$y=A\cos(\omega t+\varphi_0).$$

For at opnå dette, ser vi på følgende differentialligning, hvor vi har sat $y=x\,e^{\beta\cdot t}$.

(5.12) $$\frac{d^2(xe^{\beta\cdot t})}{dt^2}+\omega^2xe^{\beta\cdot t}=0$$

Formålet er, at omforme denne ligning til den oprindelige ligning $\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+c\cdot x=0$ ved et passende valg af konstanterne β og ω^2. Vi udregner derfor:

$$\frac{d^2(xe^{\beta\cdot t})}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}e^{\beta\cdot t}+x\beta e^{\beta\cdot t})=\frac{d^2x}{dt^2}e^{\beta\cdot t}+\frac{dx}{dt}\beta e^{\beta\cdot t}+\frac{dx}{dt}\beta e^{\beta\cdot t}+x\beta^2e^{\beta\cdot t}$$

$$\frac{d^2(x\,e^{\beta\cdot t})}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}e^{\beta\cdot t}+2\beta\frac{dx}{dt}e^{\beta\cdot t}+x\beta^2e^{\beta\cdot t}$$

Vi tilføjer leddet $\omega^2xe^{\beta\cdot t}$, og sætter resultatet lig med nul.

(5.13) $$\frac{d^2(xe^{\beta\cdot t})}{dt^2}+\omega^2xe^{\beta\cdot t}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}e^{\beta\cdot t}+2\beta\frac{dx}{dt}e^{\beta\cdot t}+x\beta^2e^{\beta\cdot t}+\omega^2xe^{\beta\cdot t}=0$$

Ligningen reduceres ved division med $e^{\beta\cdot t}$.

(5.14) $$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\cdot\frac{dx}{dt}+(\beta^2+\omega^2)=0$$

Dette sammenlignes da med den oprindelige differentialligning:

(5.15) $$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + c \cdot x \cdot = 0$$

Man ser at de to differentialligninger er identiske, hvis og kun hvis:

$$\beta = \frac{b}{2} = \frac{\alpha}{2m} \quad \text{og} \quad \beta^2 + \omega^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = c - \frac{b^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m}.$$

Vi kan imidlertid løse (5.13) direkte. Hvis vi nemlig sætter $y = x \cdot e^{\beta \cdot t}$, er differentialligningen af formen:

(5.16) $$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

Differentialligningen (5.16) løsningen: $y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, så vi finder

(5.17) $$y = x \cdot e^{\beta \cdot t} = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad \Leftrightarrow \quad x = A \cdot e^{-\beta \cdot t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Tilbagefører vi nu fra oprindelige differentialligning, hvor $\beta = \dfrac{\alpha}{2m}$ and $\omega^2 = \dfrac{k}{m} - \dfrac{\alpha^2}{4m}$ fås:

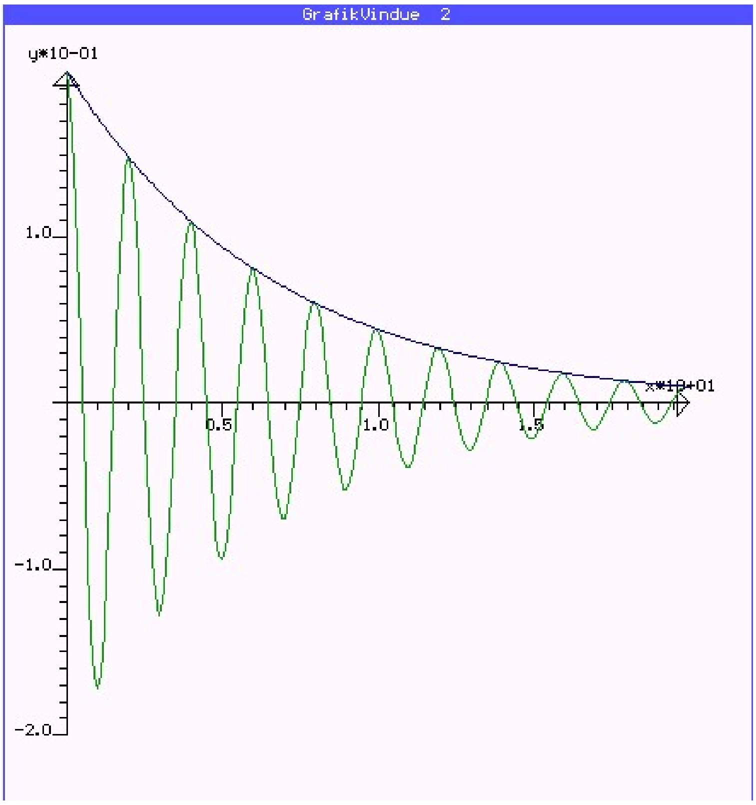
(5.18) $$x(t) = Ae^{-\frac{\alpha}{2m} \cdot t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}} \cdot t + \varphi_0\right).$$

Vi finder altså den samme løsning, som vi fandt ved hjælp af komplekse tal, med en eksponentielt aftagende amplitude

Nedenfor er vist en grafen for en numerisk løsning af differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

For den eksponentielt dæmpede harmoniske svingning, og hvor den eksponentielle indhyldningskurve også er tegnet.



Dæmpede harmoniske svingninger findes overalt i naturen, og udtrykket (5.14) genfinder man derfor ofte til beskrivelse af sådanne svingninger.

6. Tvungen harmonisk svingning uden dæmpning

Vi betragter en tvungen svingning uden dæmpning, hvor massen m foruden "fjederkraften", (som opfylder Hookes lov), er påvirket af en ydre tidsafhængig kraft.
Resultaterne kan direkte overføres til en elektrisk svingningskreds men en spole og en kapacitor, som er pålagt en vekselspænding.

$$F_{res} = -k \cdot x + F_{ydre} \quad \Leftrightarrow$$

(6.1) $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_{ydre}(t) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_{ydre}(t)}{m}$$

Vi vil antage, at den ydre kraft varierer harmonisk. $\dfrac{F_{ydre}(t)}{m} = \dfrac{f_0}{m}e^{i\omega t}$.

Løsningen til differentialligningen ovenfor er (som bekendt) en partikulær løsning til den inhomogene ligning plus den fuldstændige løsning til den homogene ligning:

(6.2) $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

som har løsningen:

$$x = A\cos(\omega_0 t+\varphi), \quad hvor \quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Da differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=\frac{f_0}{m}e^{i\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0{}^2x=\frac{f_0}{m}e^{i\omega t}$$

er af 2. orden med konstante koefficienter, kan vi bestemme en partikulær løsning som: $x = Ae^{i\omega t}$ (hvor ω er den påtrykte frekvens), som indsat giver:

(6.3) $$-\omega^2Ae^{i\omega t}+\omega_0{}^2Ae^{i\omega t}=\frac{f_0}{m}e^{i\omega t},$$

som løses med hensyn til A til at give:

$$A=\frac{\frac{f_0}{m}}{\omega_0{}^2-\omega^2}$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen, kan herefter skrives, som den partikulære løsning plus den fuldstændige løsning til den homogene ligning

(6.4) $$x=A_0\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{\frac{f_0}{m}}{\omega_0{}^2-\omega^2}\cos(\omega t)$$

Skriver vi dette som: $x = A\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi)+ B\cdot\cos(\omega t)$, kan vi i tilfældet, hvor $A = B$ anvende den første af de logaritmiske formler for addition af to cos-funktioner:

$$\cos u+\cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \quad \text{og} \quad \cos u-\cos v=-2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

(6.5) $$x=2A\cos(\frac{\omega_0+\omega}{2}t+½\varphi)\cos(\frac{\omega_0-\omega}{2}t+½\varphi)$$

Systemet vil altså udføre svingninger med frekvensen $\frac{\omega_0+\omega}{2}$ og med en ”amplitude” $2A\cos(\frac{\omega_0-\omega}{2}t+½\varphi)$, der afhænger af tiden, skiftende mellem værdierne -2A og 2A.

Fænomenet kaldes for ”svævninger”, som især er kendt for lydbølger.

I almindelighed er de to amplituder A og B, naturligvis ikke lig med hinanden, men det ændrer kun lidt på resultatet, idet man for to tal A og B, altid kan bestemme tal C og D, således, at $A = C+D$ og $B = C - D$, og løse for C og D:

$$C = \frac{A+B}{2} \quad og \quad D = \frac{A-B}{2}$$

Så løsningen (6.4) kan skrives

$$A\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi)+ B\cdot\cos(\omega t)=(C+D)\cos(\omega_0 t+\varphi)+ (C-D)\cos(\omega t)=$$

$$C\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi)+ C\cdot\cos(\omega t)+ D\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi)- D\cdot\cos(\omega t)$$

Herefter kan løsningen omskrives til:

$$(6.6) \quad x = 2C\cos(\frac{\omega_0+\omega}{2}t + ½\varphi)\cos(\frac{\omega_0-\omega}{2}t + ½\varphi) - 2D\sin(\frac{\omega_0+\omega}{2}t + ½\varphi)\sin(\frac{\omega_0-\omega}{2}t + ½\varphi)$$

Resultatet er således to svævninger, med samme frekvens, men, hvor "amplituden" er $\frac{\pi}{2}$ ude af fase. Dette vanskeliggør en eksperimentel bestemmelse af frekvensen i svævningerne.

En dæmpet harmonisk svingning kan i princippet behandles på helt samme måde, men det er mindre interessant, da dæmpningsleddet vil forsvinde efter en vis tid (afhængig af dæmpningen), og man derfor ikke efter et stykke tid, vil observere de svævningsfænomener, der er beskrevet ovenfor.