Cykelfysik

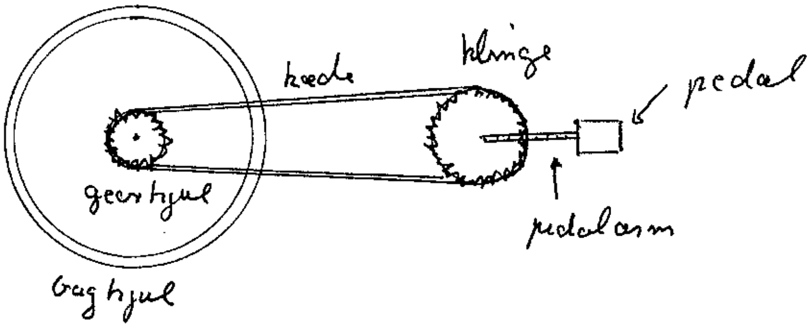
Om gear-udveksling, kraftoverførsel og effekt

Ole Witt-Hansen 2009

Indhold

1. Udveksling ved et gear

Den aksel, som pedalerne er monteret på kaldes for kranken. De tandhjul, som er monteret på kranken kaldes for klinger. På en cykel uden gear eller en cykel med indvendige gear, er der kun en klinge. Tandhjulene, der er monteret på baghjulsakslen, kaldes for gearhjul. Klingen og gearhjulene er forbundet med kæden.



Radien på klingen kaldes for r_{klinge}, radien på gearhjul betegnes r_{gear} og radien på baghjulet betegnes r_{hjul}. Antallet af tænder på klingen betegnes n_{klinge}, antallet af tænder på gearhjulet betegnes n_{gear}. Afstanden mellem tænderne er den samme på klinge og gearhjul og den betegnes d.

Der gælder derfor, idet omkredsen på en cirkel med radius r er $2\pi r$.

(1.1) $$n_{klinge}d = 2\pi \cdot r_{klinge} \quad og \quad n_{gear}d = 2\pi \cdot r_{gear}$$

Når pedalerne – og dermed klingen – har bevæget sig en omgang, har kæden bevæget sig stykket $s = 2\pi\, r_{\text{klinge}} = n_{\text{klinge}}d$. Da klinge og gearhjul er forbundet med kæden, har gearhjulet bevæget sig det samme stykke s.

Hvis gearhjulet har drejet N_{gear} omgange er $s = N_{gear}\, 2\pi\, r_{\text{gear}} = N_{gear}\, n_{\text{gear}}d$.

Det antal omgange gearhjulet har bevæget sig, fås da ved at sætte de to udtryk lig med hinanden.

(1.2) $$s = 2\pi\, r_{\text{klinge}} = N_{gear}\, 2\pi\, r_{\text{gear}} \quad \Rightarrow \quad N_{gear} = \frac{2\pi \cdot r_{klinge}}{2\pi \cdot r_{gear}} = \frac{n_{klinge}}{n_{gear}}$$

Dette udvekslingsforhold er altså det antal omgange, som gearhjulet drejer, når pedalerne (klingen) drejes en omgang.

For at bestemme det stykke, som cyklen bevæger sig, (når pedalerne drejes én omgang), skal man multiplicere N_{gear} med omkredsen af hjulet som er $2\pi\, r_{hjul}$.:

Stykket s_{hjul}, som hjulet og dermed cyklen bevæger sig for en omgang af pedalerne er derfor:

$$s_{hjul} = 2\pi\, r_{hjul} \frac{n_{klinge}}{n_{gear}}$$

2. Kraftoverførsel og arbejde

Vi skal nu analysere kraftoverførslen fra pedalarm til baghjul. Først skal vi præcisere nogle forhold.

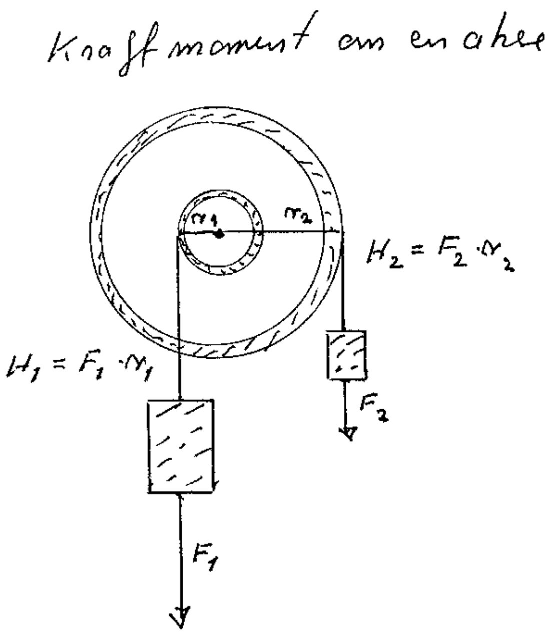
1. Den kraft, som driver cyklen fremad, er den friktionskraft, hvormed asfalten påvirker baghjulet.

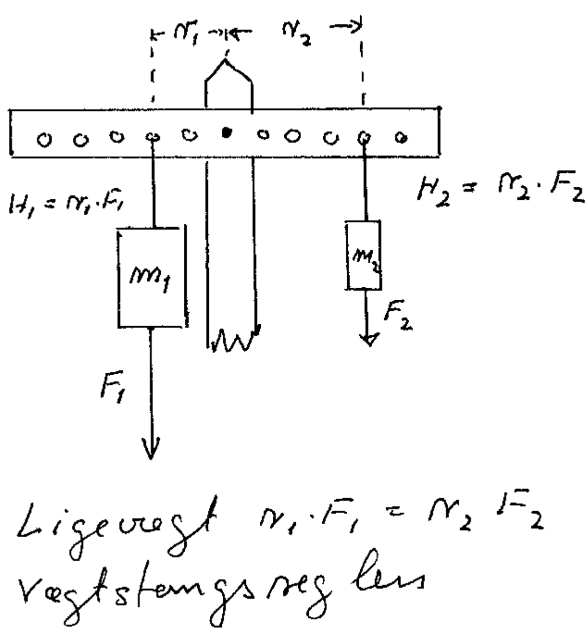
2. Reaktionskraften til denne kraft er ifølge Newtons 3. lov den kraft, hvormed baghjulet påvirker asfalten.

3. Denne sidste kraft, leveres af rytteren til pedalerne via kraftoverførslen, som består af kæden og tandhjulene.

Man kunne måske tro, at den kraft, F_{pedal}, hvormed rytteren påvirker pedalerne, er den samme kraft som den kraft F_{cykel}, som driver cyklen frem, men sådan forholder det sig ikke.

For at forstå dette er det nødvendigt at indføre begrebet *kraftmoment*, som for rotation om en akse, er det analoge begreb til *kraft* for en retlinet bevægelse.





Kraftmoment defineres løst som *kraft · arm*. Kraftmoment betegnes ofte med bogstaven *H*. Kraftmomentet kan beregnes, (når kraft *F* og arm *r* er ortogonale), som

(2.1) $$H = F \cdot r$$

På figuren ovenfor er illustreret en skive, der kan drejes om en akse, påvirket af lodder, der virker med en lodret kraft på skiven i forskellige afstande fra aksen.

Det viser sig, at der er balance – ikke når kræfterne F_1 og F_2 er lige store, men når de to kraftmomenter $H_1 = F_1 \cdot r_1$ og $H_2 = F_2 \cdot r_2$ er lige store.

Dette kaldes også for *vægtstangsreglen* og er illustreret på figuren ovenfor til højre, hvor en symmetrisk vægtstang, balancerer om en akse. Hvis man anbringer lodder i forskellige afstande er ligevægtsbetingelsen igen givet ved vægtstangsreglen:

(2.2) $$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

Ved en retlinet bevægelse er det *kraften* i bevægelsen retning, der bestemmer et legemes acceleration.

For rotation om en akse er det *kraftmomentet* med hensyn til en akse, og ikke kraften, der bestemmer *vinkelaccelerationen*.

Hvis pedalarmen har størrelsen r_{pedal} og pedalen påvirkes nedad med kraften F_{pedal}, får klingen tilført et kraftmoment $H_{\text{pedal}} = r_{pedal} \cdot F_{pedal}$.

Kraften, som klingen påvirkes med kan udregnes af :

(2.3) $$H_{pedal} = H_{klinge} \;<=>\; r_{pedal} \cdot F_{pedal} = r_{klinge} \cdot F_{klinge} \;\Rightarrow\; F_{klinge} = \frac{r_{pedal}}{r_{klinge}} F_{pedal}$$

Hvis kædetrækket er gnidningsfrit, vil denne *kraft* være den samme, som gearhjulet bliver påvirket af og som giver anledning til det kraftmoment, som driver baghjulet rundt.

(2.4) $$F_{gear} = F_{klinge} \;=>\; H_{gear} = r_{gear} F_{gear} = r_{gear} F_{klinge} \;\Rightarrow\; H_{gear} = r_{gear} \frac{r_{pedal}}{r_{klinge}} F_{pedal}$$

Det er dette kraftmoment, som driver hjulet frem.

For at bestemme Kraften F_{hjul}, som hjulet påvirker underlaget med , skal vi blot udtrykke, at

$$H_{hjul} = H_{gear}.\; H_{hjul} = H_{gear} \;\Rightarrow\; r_{hjul} F_{hjul} = r_{gear} F_{gear}$$

For at bestemme F_{hjul} , skal vi blot indsætte det fundne udtryk for $H_{gear} = r_{gear} F_{gear}$ og dividere med r_{hjul}. Herved finder man udtrykket:

(2.5) $$F_{hjul} = \frac{r_{gear}}{r_{klinge}} \frac{r_{pedal}}{r_{hjul}} F_{pedal} = \frac{n_{gear}}{n_{klinge}} \frac{r_{pedal}}{r_{hjul}} F_{pedal} \;\Leftrightarrow\; F_{pedal} = \frac{n_{klinge}}{n_{gear}} \frac{r_{hjul}}{r_{pedal}} F_{hjul}$$

Det mellemste udtryk er fremkommet, idet radius ifølge (1.1) er proportional med antallet af tænder på hjulet, og afstanden mellem tænderne er den samme på klinge og gearhjul.
Radius i pedalarmen og radius i baghjulet er uafhængige af hvilket gear man kører i, så hjulkraften er proportional med pedalkraften med en proportionalitetsfaktor, som er udvekslingsforholdet ved kraftoverførslen.

3. Arbejde ved cykelkørsel

Vi ønsker at udregne det arbejde, som udføres, når baghjulet drejes en omgang, og hjulkraften holdes konstant.
Når baghjulet er drejet en omgang og den bagudrettede kraft er F_{hjul} , er der udført arbejdet.

Pedalarbejde =kraft x vej :

(3.1) $$2\pi r_{hjul}F_{hjul} = 2\pi r_{hjul}\frac{n_{gear}}{n_{klinge}}\frac{r_{pedal}}{r_{hjul}}F_{pedal} = 2\pi\frac{n_{gear}}{n_{klinge}}r_{pedal}F_{pedal}$$

Nu er:

$\frac{n_{gear}}{n_{klinge}}$ netop det antal omgange klingen drejes, når gearhjulet (og baghjulet) drejes en omgang.

$\frac{n_{gear}}{n_{klinge}}2\pi r_{pedal} = s_{pedal}$ er derfor den strækning, som pedalerne drejer.

Indsættes dette i udtrykket for pedalarbejdet ovenfor ses, at Pedalarbejde er:

(3.2) $$2\pi r_{hjul}F_{hjul} = 2\pi\frac{n_{gear}}{n_{klinge}}r_{pedal}F_{pedal} = F_{pedal}s_{pedal}$$

Det sidste udtryk er vigtigt, idet det viser, at det arbejde der skal udføres for med konstant hjulkraft at bevæge baghjulet en omgang er *uafhængigt* af, hvilket gear man kører i.

I højt gear skal man anvende en større kraft, men dreje færre omgange. I lavt gear skal man anvende en mindre kraft, men dreje et større antal omgange.

Man kan ikke vurdere dette resultat ud fra en betragtning om, hvor anstrengende det er ved f.eks. at køre op ad en bakke i højt gear i forhold til lavt gear.
Statisk arbejde, er i almindelighed langt mere anstrengende end dynamisk arbejde.

4. Regneeksempler for en racercykel

Ovenstående formler kan illustreres ved at anvende data for en racercykel:
Min egen har 3 tandhjul på klingen, og 7 tandhjul på gearet.

Klinge: n_1 =30, n_2 =42, n_3 =52.

Baghjul (gear): n_1 =24, n_2 =22, n_3 =20, n_4 =18, n_5 =16, n_6 =14, n_7 =13.

Diameteren på den største af klingerne er d_{klinge} = 0,21 *m*

Pedalarmen er r_{pedal} = 0,19 *m*.

Radius i baghjulet er: r_{hjul} = 0,34 *m*.

Da alle hjuls har samme afstand mellem tænderne, kan alle andre diametre beregnes ved forholdsregning.

Jeg har læst mig til at en professionel cykelrytter yder en effekt på ca. 200 W. For en almindelig cyklist, vil vi udregne den kraft, som pedalerne skal påvirkes med i forskellige gear, ved en effekt på 100 W og en hastighed på 18 km/h = 5,0 m/s og undersøge om det ser rimeligt ud.

Effekten: $P = F_{hjul}\, v$ bestemmer man $F_{hjul} = \frac{P}{v} = \frac{100\,W}{5{,}0\,m/s} = 20\,N$

Af formlen $F_{hjul} = \frac{n_{gear}}{n_{klinge}} \frac{r_{pedal}}{r_{hjul}} F_{pedal}$ får man $F_{pedal} = \frac{n_{klinge}}{n_{gear}} \frac{r_{hjul}}{r_{pedal}} F_{hjul}$

Vælger vi et mellemgear: $n_{klinge} = 42$ og $n_{gear} = 20$, får man ved at indsætte talværdierne:

$F_{pedal} = \frac{42}{20} \frac{0{,}34}{0{,}19} 20\,N = 75\,N$, hvilket nogenlunde svarer til tyngden af 7,5 kg.

Ser vi derpå på de to ekstremer: højeste og laveste gear: finder man:

Højeste gear: $F_{pedal} = \frac{52}{13} \frac{0{,}34}{0{,}19} 20\,N = 143N$ Laveste gear: $F_{pedal} = \frac{30}{24} \frac{0{,}34}{0{,}19} 20\,N = 45\,N$

Antallet af omgange pedalerne skal drejes rundt i de tre tilfælde, kan beregnes ud fra udtrykket ovenfor, der angiver det stykke som hjulet drejer, når pedalerne drejer en omgang.

$$s_{hjul} = 2\pi\, r_{hjul} \frac{n_{klinge}}{n_{gear}} \;,$$

hvis pedalerne drejer N_{pedal} omgange, så er strækningen:

$$s_{hjul} = 2\pi\, r_{hjul} \frac{n_{klinge}}{n_{gear}} N_{pedal}$$

som kan løses for N_{pedal}.

$$N_{pedal} = \frac{n_{gear}}{n_{klinge}} \frac{s_{hjul}}{2\pi\, r_{hjul}}$$

Hvis hjulet drejer N_{hjul} omgange, er $s_{hjul} = 2\pi r_{hjul} N_{hjul}$ og man finder så, hvad er indlysende:

$$N_{pedal} = \frac{n_{gear}}{n_{klinge}} N_{hjul} \;.$$

Ved hastigheden 5,0 m/s, drejer baghjulet:

$N_{hjul} = \frac{v}{2\pi r_{hjul}}$ omgange, *så* $N_{hjul} = 5{,}0\ m/s / 2\pi \cdot r_{hjul}$ = 2,35 omgange/s.

For de 3 tilfælde mellem, højeste og laveste gear, som beskrevet ovenfor bliver det:

N_{pedal} = 1,1 rps, N_{pedal} = 0,58 rps og N_{pedal} = 1,9 rps (rounds per second)

5. Det er hårdt at køre op ad bakke

Alle cyklister ved, at forcere selv moderate stigninger, kræver et betydeligt større arbejde end at cykle ligeud, og at hastigheden dermed bliver stærkt modereret.

Befinder man sig på en bakke med en stigning på $\alpha = 5^0$, som er en pæn stigning, svarende til 8,75%, og hvis massen af cyklist og cykel er m, så er tyngdens komposant modsat rettet bevægelsen givet ved:

$$F_1 = mg\sin\alpha.$$

For en cyklist med den samlede masse 80 kg, giver det en modsat rettet kraft på 68,5 N.
Bevæger man sig med hastigheden 12,0 km/h = 3,33 m/s, svarer dette til en effekt:

$$P = F \cdot v = 228\ W$$

hvilket sammen med standard effekten for en almindelig cyklist, som er 100 W, giver det en samlet effekt på

$$P_{cykelrytter} = 328\ W.$$

Kraften, hvormed hjulet påvirker asfalten, kan udregnes af:

$$F_{hjul}\, v = 328\ W \;\; => F_{hjul} = 98{,}5\ N$$

Ud fra ligningen (2.5):

$$F_{pedal} = \frac{n_{klinge}}{n_{gear}} \frac{r_{hjul}}{r_{pedal}} F_{hjul}$$

kan man så bestemme kraften på pedalerne i de 3 tilfælde for valg af gearing, mellem, højeste og laveste, som beskrevet ovenfor. (Tallene i parentes er den masse, hvis tyngde svarer til kraften).

$$F_{pedal} = 411\ \text{N}\ (41\ \text{kg})\ ,\ F_{pedal} = 705\ \text{N}\ (70{,}5\ \text{kg})\ \text{ og } F_{pedal} = 220\ \text{N}\ (22\ \text{kg})\ .$$

Sættes hastigheden ned til det halve, hvilket er mere realistisk, er det alligevel hårdt at køre op ad bakke.

6. Simple forsøg med en racercykel

Forsøg 4.1. Undersøgelse af relationen 1.3.
Materiel: Et båndmål.
På en racercykel, tæller man antallet af tænder på klingerne og på gearhjulene. Man måler diameteren på klingen og diameteren på baghjulet. Det er ikke nødvendigt at måle diameteren på de øvrige tandhjul, da forholdet mellem diametrene er lig med forholdet mellem tænderne.

Cyklen holdes oprejst, positionen af baghjulet markeres og med stram kæde, føres pedalerne en gang rundt.
Forsøget gentages med forskellige valg af gear, og relationen (1.3) efterprøves.

$$s_{hjul} = 2\pi\, r_{hjul} \frac{n_{klinge}}{n_{gear}}$$

Forsøg 4.2. Undersøgelse af relationen 1.3
Materiel : 5 *kg* eller 10 *kg* lod. Newtonmeter 20 – 50 Nm.

Længden af pedalarmen måles. Newtonmetret fæstnes bag i cyklen. Baghjulet skal så fast på underlaget. Cyklen skal manuelt støttes, så den ikke vælter, men den må ikke påvirkes i længde retningen. Pedalarmen skal være vandret. Herpå anbringes det tunge lod, og kraftmåleren bag på cyklen aflæses.
Forsøget gentages med forskellige valg af gear og eventuelt også med forskellige tunge lodder. Kraften, hvormed loddet med masse m påvirker pedalarmen er $F_{pedal} = mg$. Man sammenligner resultaterne med relationen.

$$F_{hjul} = \frac{r_{gear}}{r_{klinge}} \frac{r_{pedal}}{r_{hjul}} F_{pedal} = \frac{n_{gear}}{n_{klinge}} \frac{r_{pedal}}{r_{hjul}} F_{pedal}$$