Curling fysik

Elastisk ikke centralt stød mellem to curling sten

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk

Ole Witt-Hansen 2018

Indhold

1. Elastisk stød

Curling er et glimrende eksempel på illustration af et ikke centralt elastisk stød mellem to identiske legemer med cirkulær form, som bevæger sig på et underlag (næsten) uden friktion.

Det ikke centrale elastiske stød er imidlertid - både matematik og fysisk - betydelig mere kompliceret at analysere end det centrale stød.
Centralt stød var indtil 1988 en del af pensum i fysik på højt niveau, men da det jo ikke er tilfældet længere, indleder vi med at analysere det centrale elastiske stød, også for at introducere nogle grundlæggende begreber og fastlægge en notation.

2. Centralt elastisk stød

Emnet er behandlet udførligt i lærebogen: Elementær Fysik 1, afsnittet: ”Impulsbevarelse ved stød”, men her vil vi blot nøjes med at udregne hastighederne efter stødet, når masserne af de to legemer og deres hastigheder før stødet er kendte.

Vi ser derfor på et centralt elastisk stød mellem to legemer (1) og (2). Centralt stød betyder, at de to legemer bevæger sig langs den samme rette linie før og efter stødet, og af den grund skal vi udlade vektor symbolerne, men i stedet med at regne hastighederne med fortegn.

Vi betegner konsekvent hastigheder før stødet med *u*, og hastigheder efter stødet med bogstavet *v*. Fysiske størrelser, der hører til legeme (1) betegnes med indeks $_1$, og tilsvarende for legeme (2). For eksempel er v_1 hastigheden af legeme (1) efter stødet.

For at holde det matematiske på et passende niveau skal vi først antage, at legeme (2) er i hvile før stødet, så $u_2 = 0$. Bagefter skal vi betragte et stød, hvor begge legemer er i bevægelse før stødet.

For et vilkårligt stød gælder der altid impulsbevarelse, men for et elastisk stød gælder der også bevarelse af den kinetiske energi.

(2.1) $I: \; m_1 u_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2$ (Impulsbevarelse, hvor $u_2 = 0$)

$II: \; \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ (Bevarelse af kinetisk energi)

Vi vil nu forsøge at løse disse to (ikke lineære) ligninger, for at bestemme v_1 og v_2, som er hastighederne efter stødet. Derfor laver vi nogle matematiske omskrivninger:

(2.2)
$$\begin{aligned} I: &\; m_1(u_1 - v_1) = m_2 v_2 \\ II: &\; \tfrac{1}{2} m_1(u_1^2 - v_1^2) = \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} I: &\; m_1(u_1 - v_1) = m_2 v_2 \\ II: &\; m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) = m_2 v_2^2 \end{aligned}$$

I ligningerne til højre dividerer vi II med I og får:

$$I: \; m_1(u_1 - v_1) = m_2 v_2 \qquad\qquad I: \; m_1(u_1 - v_1) = m_2 v_2$$

$$\Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow$$

$$II: \; (u_1 + v_1) = v_2 \;\vee\; v_2 = 0 \qquad\qquad II: \; u_1 + v_1 = v_2 \;\vee\; v_2 = 0$$

$$I: \; u_1 - v_1 = 0 \qquad \vee \qquad\qquad I + II: \; m_1(u_1 - v_1) = m_2(u_1 + v_1)$$

Fra I+II kan vi bestemme v_1, og derefter v_2 ved at indsætte i $u_1 + v_1 = v_2$.

$$(2.3) \qquad v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \quad \wedge \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \qquad \vee \qquad v_2 = 0 \;\wedge\; v_1 = u_1$$

Fra (2.3) kan vi se at hastighederne efter stødet v_1 og v_2 kan beregnes, når vi kender hastigheden u_1 før stødet og de to masser m_1 og m_2.

Løsningen $v_2 = 0$, er matematisk korrekt, men er uden fysisk interesse, da et betyder at legemerne passerer hinanden uden at vekselvirke.

Af udtrykkene fremgår, at v_2 altid er ensrettet med u_1, mens v_1 er ensrettet med u_1, hvis $m_1 > m_2$ (medløb) og modsat rettet u_1, hvis $m_1 < m_2$ (refleksion).

Hvis $m_1 = m_2$, ser man, at $v_2 = u_1$ og at $v_1 =0$. De to legemer bytter hastigheder, et fænomen, der er velkendt fra billard spil.

Hvis vi nu antager at m_2 er ”uendelig stor” i forhold til m_1 (en bold rammer et gulv), så kender vi resultatet, som også kan vises ud fra ligningerne (2.3), ved at dividere med m_2 i tæller og nævner, og anvende at forholdet $m_1 : m_2$ er nul.

$$(2.4) \qquad v_1 = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} u_1 = -u_1 \quad \wedge \quad v_2 = \frac{2\frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} u_1 = 0$$

Gulvet bliver liggende, og bolden springer tilbage med den samme hastighed. Vi har taget dette med, fordi vi skal anvende resultatet i den kinetiske molekylteori, hvor molekyler støder mod væggen af en beholder.

Det generelle tilfælde, hvor begge legemer er i bevægelse før stødet, kan løses efter den samme metode ved anvendelse af kun lidt mere matematisk snilde. Resultatet er:

$$I: \; m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad \text{(Impulsbevarelse, hvor } u_2 <> 0\text{)}$$
$$II: \; \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad \text{(Bevarelse af den kinetiske energi)}$$

$$I: \; m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2)$$
$$II: \; m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2)$$

$$I: \quad m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2)$$
$$II: \quad m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) = m_2(v_2 - u_2)(v_2 + u_2)$$

Ved at dividere *II* med *I*:

$$I: \quad m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2)$$
$$II: \quad u_1 + v_1 = v_2 + u_2$$

$$I: \quad m_2 v_2 + m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$
$$II: \quad v_2 - v_1 = u_1 - u_2$$
$$I: \quad m_2 v_2 + m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$
$$II: \quad m_1 v_2 - m_1 v_1 = m_1 u_1 - m_1 u_2$$

$$(m_1 + m_2)v_2 = 2m_1 u_1 + (m_2 - m_1)u_2 = 2(m_1 u_1 + m_2 u_2) - (m_1 + m_2)u_2$$

Her af følger udtrykket for v_2. Udtrykket for v_1 findes på helt tilsvarende måde.

(2.5) $$v_1 = \frac{2(m_1 u_1 + m_2 u_2)}{m_1 + m_2} - u_1 \qquad \wedge \qquad v_2 = \frac{2(m_1 u_1 + m_2 u_2)}{m_1 + m_2} - u_2$$

Indsættes $u_2 = 0$, ses efter en mindre reduktion, at man genfinder resultatet (2.3)

2.1. Massemidtpunkt systemet. (CM: centre of mass)

Massemidtpunktet for et system af to partikler (1) og (2) er defineret ved ligningen:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Hvis partiklerne har hastighederne $\vec{u}_1$ og $\vec{u}_2$, samt masserne m_1 og m_2, så er hastigheden af massemidtpunktet (CM-systemet) $\vec{v}_{CM}$ givet ved ligningen:

(2.5) $$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2}{m_1 + m_2}$$

Vi skal konsekvent betegne hastighederne relativt til CM-systemet med en apostrof.
Så vi har:

(2.6) $$\vec{u}_1 = \vec{u}_1' + \vec{v}_{CM} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{v}_{CM} = \vec{u}_1 - \frac{m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{u}_1' = \frac{m_2(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)}{m_1 + m_2}$$ Og på helt samme måde: $$\vec{u}_2' = -\frac{m_1(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)}{m_1 + m_2}$$

Vi noterer os, at impulsen af systemet i CM-systemet er nul.

(2.7) $$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = m_1\vec{u}_1' + m_2\vec{u}_2' = \frac{m_1 m_2(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 m_1(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)}{m_1 + m_2} = \vec{0},$$

Som betyder at:

$$\vec{u}_2' = -\frac{m_1}{m_2}\vec{u}_1' \quad \text{og hvis masserne er ens:} \quad \vec{u}_2' = -\vec{u}_1'$$

Som viser, at i CM-systemet har de to masser modsat rettede hastigheder.

Hvis masserne er lige store, så er hastighederne det også, så efter stødet får vi præcis de samme ligninger, hvis vi blot erstatter *u* med *v*.

Bemærk at ligningerne ovenfor gælder, hvad enten stødet er centralt eller ej.

Hvis legeme (2) er i hvile før stødet, så bliver ligningerne mere simple.

$$\vec{u}_1' = \frac{m_2\vec{u}_1}{m_1 + m_2} \quad \text{and} \quad \vec{u}_2' = -\frac{m_1\vec{u}_1}{m_1 + m_2}$$

3. Curling fysik

Vi skal herefter betragte to identiske cirkulære legemer (f.eks. to curling sten eller to billard kugler), som støder sammen i et ikke centralt elastisk stød og hvor det ene legeme er i hvile før stødet. (Det generelle tilfælde bliver for matematisk kompliceret, og har ikke så mange anvendelser).
Formålet er at bestemme de to legemers afbøjningsvinkler og hastigheder efter stødet i laboratoriesystemet (Lab-systemet).
I dette system kan man imidlertid vise, at legemernes hastigheder efter stødet altid vil være vinkelret på hinanden. Dette følger af energi og impulsbevarelse.

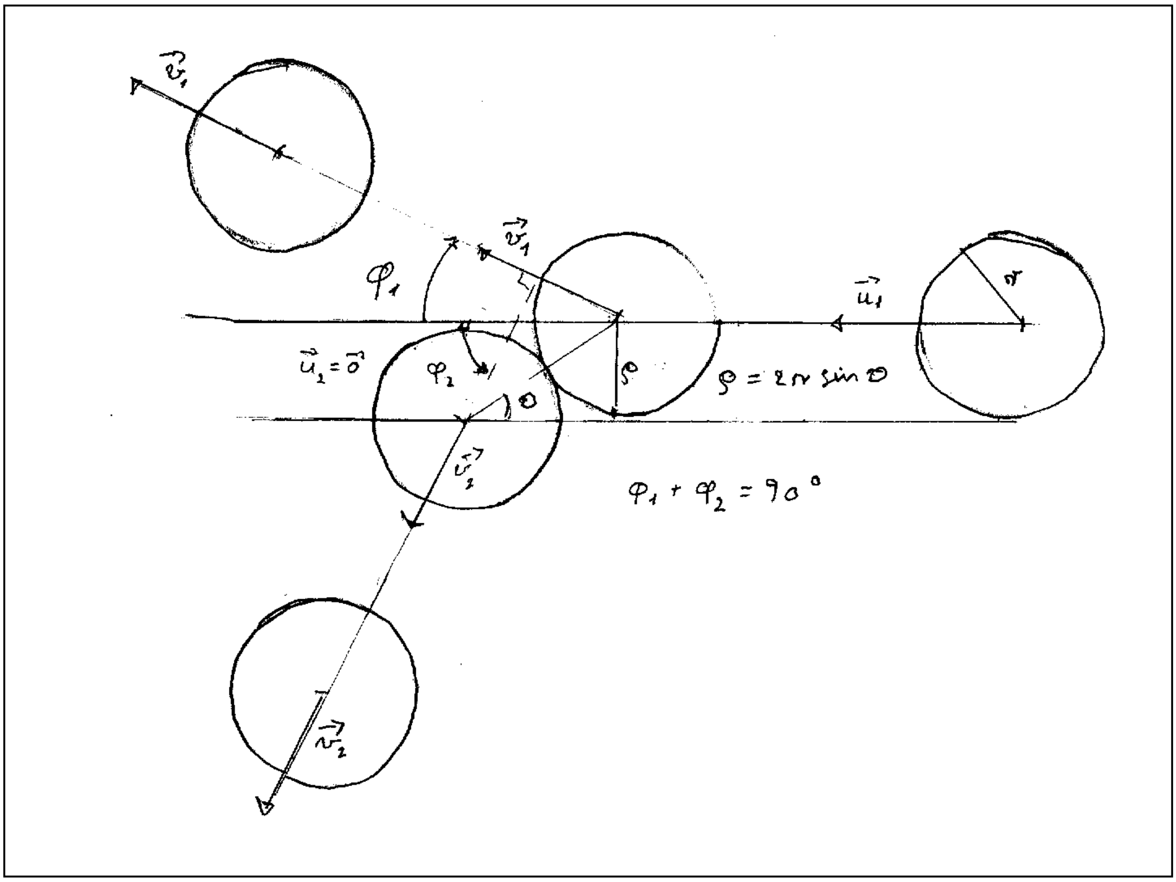
$$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m\vec{u}_1 \quad og \quad \tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 = \tfrac{1}{2}mu_1^2 \quad \Rightarrow$$
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{u}_1 \quad og \quad v_1^2 + v_2^2 = u_1^2$$

Vi ser at hastighederne danner en trekant som opfylder Pythagoras' sætning, og derfor: $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$. Noget der gælder for såvel curling sten som billardkugler.

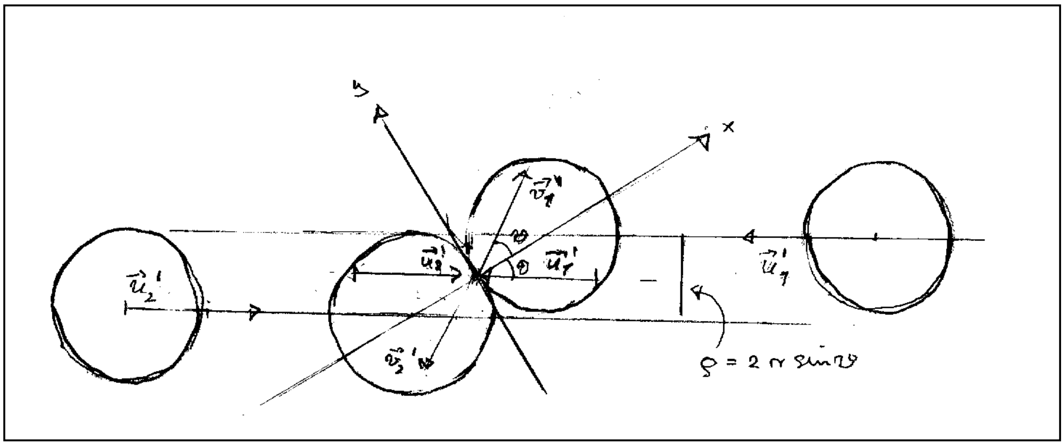
På figuren nedenfor er skitseret et sådant stød i (Lab-systemet).

Vores mål er at bestemme φ_1 , hvor $\varphi_2 = 90 - \varphi_1$, tilsammen med v_1 og v_2 og alt sammen udtrykt ved u_1 og stødparameteren ρ, som er den vinkelrette afstand mellem centrene for de to legemer.

Ikke centralt elastisk stød i Lab-systemet.



Det viser sig, at det ikke er matematisk fremkommeligt at finde hastighederne efter stødet i Lab-systemet, så vi vil i stedet betragte stødet i CM-systemet, og drage fordel af desymmetri egenskaber, der er forbundet med dette system.
Nedenfor er på figuren vist det samme stød i CM-systemet.



Vi har forsynet tegningen med et koordinatsystem, som har begyndelsespunkt i kontaktpunktet mellem de to legemer og hvor x-aksen går gennem centrene for de to legemer, så y-aksen er tangent til de to cirkulære legemer. Idet de to legemer har samme masse er $\vec{u}_2' = -\vec{u}_1'$.

Idet stødet i CM-systemet for hvert af de to legemer svarer til et stød mod en væg, er det eneste der sker at *x*-koordinaten skifter fortegn.
At dette er tilfældet, kan også ses direkte ud fra energi og impulsbevarelse i CM-systemet.
Impulsbevarelse giver: $\vec{u}_2{}' = -\vec{u}_1{}'$ og $\vec{v}_2{}' = -\vec{v}_1{}'$ og energibevarelse: (Af typografiske grund har vi udeladt apostroffen i denne ligning)

$$\tfrac{1}{2}mu_1^2 + \tfrac{1}{2}mu_2^2 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad u_1^2 + u_2^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2u_1^2 = 2v_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = u_1$$

Og dermed: $v_2{}' = v_1{}' = u_1{}' = u_2{}'$.

Disse ligninger gælder faktisk stadig i CM-systemet, selv om de to legemer ikke har samme masse, idet det følger af impulsbevarelse og energibevarelse.

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = \vec{0} \ \wedge \ m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{m_1}{m_2}u_1 \ \wedge \ v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1$$

$$\tfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2u_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 \quad \Rightarrow$$

$$m_1u_1^2 + m_2\left(\frac{m_1}{m_2}u_1\right)^2 = m_1v_1^2 + m_2\left(\frac{m_1}{m_2}v_1\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{m_1(m_1+m_2)}{m_2}u_1^2 = \frac{m_1(m_1+m_2)}{m_2}v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = u_1$$

For et elastisk centralt stød i CM-systemet opfører legemerne sig om de har ramt en mur.
For et centralt stød i Lab-systemet, hvor $u_2 = 0$ er hastighederne efter stødet givet ved (2.3).
Vi beregner så hastighederne i CM-systemet:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 \ \wedge \ v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 \ \text{ and } \ v_{CM} = \frac{m_1u_1}{m_1 + m_2}$$

$$u_1 = u_1{}' + v_{CM} \quad \Rightarrow \quad u_1{}' = u_1 - v_{CM} = u_1 - \frac{m_1u_1}{m_1+m_2} = \frac{m_2u_1}{m_1+m_2}$$

$$u_2 = u_2{}' + v_{CM} \quad \Rightarrow \quad u_2{}' = u_2 - v_{CM} = 0 - \frac{m_1u_1}{m_1+m_2} = -\frac{m_1u_1}{m_1+m_2}$$

$$v_1 = v_1{}' + v_{CM} \quad \Rightarrow \quad v_1{}' = v_1 - v_{CM} = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}u_1 - \frac{m_1u_1}{m_1+m_2} = -\frac{m_2u_1}{m_1+m_2}$$

$$v_2 = v_2{}' + v_{CM} \quad \Rightarrow \quad v_2{}' = v_2 - v_{CM} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}u_1 = \frac{m_1u_1}{m_1+m_2}$$

Ud fra disse ligninger kan vi slutte at:

$$m_1u'_1 + m_2u'_2 = 0 \ \wedge \ m_1v'_1 + m_2v'_2 = 0 \quad and \quad v_1{}' = -u_1{}' \ \wedge \ v_2{}' = -u_2{}'$$

3.1 Ikke centralt stød i CM-systemet

For et centralt stød i CM-systemet bliver de to legemer reflekteret på samme måde, som hvis de rammer en væg, og det samme sker i CM-systemet for et ikke centralt stød.
Fra figuren ovenfor i CM-systemet, kan vi se:

$\vec{u}_1{}' = u_1{}'(-\cos\theta, \sin\theta) \quad and \quad \vec{u}_2{}' = u_2{}'(\cos\theta, -\sin\theta)$ Og idet: $v_2{}' = v_1{}' = u_1{}' = u_2{}'$

$\vec{u}_1{}' = u_1{}'(-\cos\theta, \sin\theta) \quad and \quad \vec{u}_2{}' = u_1{}'(\cos\theta, -\sin\theta) \qquad (\vec{u}_2{}' = -\vec{u}_1{}')$

$\vec{v}_1{}' = u_1{}'(\cos\theta, \sin\theta) \quad and \quad \vec{v}_2{}' = u_1{}'(-\cos\theta, -\sin\theta) \qquad (\vec{v}_2{}' = -\vec{v}_1{}')$

Laboratoriesystemet har *x*-aksen rettet langs det indkommende legeme (curling sten).

I Lab-systemet har vi: $\vec{v}_{CM} = \dfrac{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}{m_1 + m_2} = \tfrac{1}{2}\vec{u}_1 = \tfrac{1}{2}u_1(1,0)$

Og ligeledes i Lab-systemet. Bemærk, på grund af orienteringen af Lab-systemet, er spredningsvinklen $2\theta - 180$.

$\vec{u}_1{}' = u_1{}'(1,0)$, $\vec{u}_2{}' = u_1{}'(-1,0)$,
$\vec{v}_1{}' = u_1{}'(-\cos(2\theta - 180), -\sin(2\theta - 180))$
$\vec{v}_2{}' = u_1{}'(\cos(2\theta - 180), \sin(2\theta - 180))$
$\vec{v}_1{}' = u_1{}'(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, $\vec{v}_2{}' = u_1{}'(-\cos 2\theta, -\sin 2\theta)$

Vi transformerer så hastighederne til Lab-systemet

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_1{}' + \vec{v}_{CM} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1{}' = \vec{u}_1 - \tfrac{1}{2}\vec{u}_1 = \tfrac{1}{2}\vec{u}_1 = \tfrac{1}{2}u_1(1,0)$$
$$\vec{u}_2 = \vec{u}_2{}' + \vec{v}_{CM} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2{}' = \vec{u}_2 - \tfrac{1}{2}\vec{u}_1 = \vec{0} - \tfrac{1}{2}\vec{u}_1 = \tfrac{1}{2}u_1(-1,0)$$

Hvis vi sætter $\varphi = 2\theta$, får vi:

$$\vec{v}_1{}' = u_1{}'(\cos\varphi, \sin\varphi) \quad og \quad \vec{v}_2{}' = -u_1{}'(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

Som vi transformerer til Lab-systemet

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1{}' + \vec{v}_{CM} = \tfrac{1}{2}u_1(\cos\varphi, \sin\varphi) + \tfrac{1}{2}u_1(1,0) = \tfrac{1}{2}u_1(\cos\varphi + 1, \sin\varphi)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2{}' + \vec{v}_{CM} = -\tfrac{1}{2}u_1(\cos\varphi, \sin\varphi) + \tfrac{1}{2}u_1(1,0) = -\tfrac{1}{2}u_1(\cos\varphi - 1, \sin\varphi)$$

Vi noterer os at de to hastigheder er vinkelret på hinanden, idet:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -\tfrac{1}{4}u_1{}^2((\cos\varphi - 1)(\cos\varphi + 1) + \sin^2\varphi) = \cos^2\varphi - 1 + \sin^2\varphi = 0$$

Spredningsvinklen for (1) er givet ved:

$$\tan\varphi_1 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+1} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta+1} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1-2\sin^2\theta-1} = -\frac{1}{\tan\theta} = -\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta} \quad \text{eller}$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{v_{1y}}{\sqrt{{v_{1x}}^2+{v_{1y}}^2}} = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{(\cos 2\theta+1)^2+\sin^2 2\theta}} = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos^2 2\theta+1+2\cos 2\theta+\sin^2 2\theta}} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{2+2\cos 2\theta}}$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{2+2(2\cos^2\theta-1)}} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{\cos^2\theta)}} = \sin\theta$$

Disse udtryk er imidlertid ikke så interessante, hvis det ikke kædes sammen med stødparameteren:

$$\rho = 2r\sin\theta \quad\Leftrightarrow\quad \sin\theta = \frac{\rho}{2r} = x$$

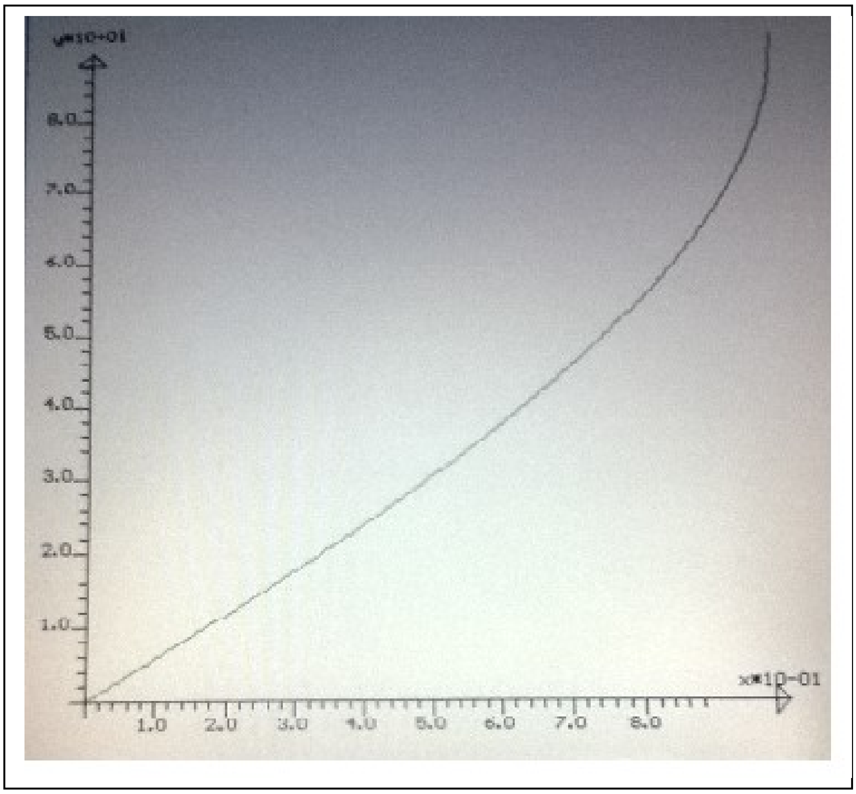
$$\tan\varphi_1 = -\frac{1}{\tan\theta} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad \text{og} \qquad \sin\varphi_1 = \sin\theta = x$$

Endelig vil vi godt kende farten af de to curling sten (eller billardkugler) efter stødet:

$\vec{v}_1 = \tfrac{1}{2}u_1(\cos 2\theta+1, \sin 2\theta) \quad\Rightarrow\quad v_1 = \tfrac{1}{2}u_1\sqrt{(\cos 2\theta+1)^2+\sin^2 2\theta} = \tfrac{1}{2}u_1 2\cos\theta = u_1\sqrt{1-x^2}$

$\vec{v}_2 = -u_1(\cos 2\theta-1, \sin 2\theta) \Rightarrow \quad v_2 = \tfrac{1}{2}u_1\sqrt{(\cos 2\theta-1)^2+\sin^2 2\theta} = \tfrac{1}{2}u_1 2\sin\theta = u_1 x$

Nedenfor er vist en computergenereret graf som viser spredningsvinklen som funktion af $\frac{\rho}{2r} = x$.



3.2 Eksempel

Et opslag på Google oplyser at curling stenene har en omkreds på max 91.4 cm(?), og der med en radius $r = \dfrac{91.4\,cm}{2\pi} = 14.5\,cm$

Med en hastighed på 2.0 m/s og en stødparameter, svarende til en radius, så x = 0.5, finder vi spredningsvinklen for (1):

$$\sin\varphi_1 = \sin x\,.\ \varphi_1 = \sin^{-1} = 30^0\,.\ \text{Og hermed: } \varphi_2 = 60^0$$

Og farten af de to sten efter stødet:

$$v_1 = u_1\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}\,m/s \quad og \quad v_2 = u_1 x = 1{,}0 m/s$$

Hvis stødparameteren er $\rho = 0{,}9\cdot 2r : x = 0.9$, så bliver resultaterne: $\varphi_1 = 25.8^0$.

$v_1 = u_1\sqrt{1-x^2} = 0.872\,m/s \quad og \quad v_2 = u_1 x = 1.8 m/s$

Curling drejer sig om helt ekstrem visuel baseret præcision.

Vi skal forsøge at beregne hvor meget spredningsvinklen ændrer sig hvis x får en tilvækst $\Delta x = 0{,}01$ ved x =0,5, som svarer til: $\rho = 14{,}5\,cm \quad og \quad \Delta\rho = 0{,}29\,cm$.

Vi har: $\sin\varphi_1 = \sin\theta = x$, så $\varphi_1 = \sin^{-1} x$ og $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

og hermed:

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi_1 = \frac{180}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x = 0{,}66^0$$

Hvis stenen glider 1 m, så vil det svare til en ændring vinkelret på retningen på $0{,}66^0\dfrac{\pi}{180}1m = 0{,}069\,m$, og det vil svare til en forskydning vinkelret på bevægelsesretningen på 11,5 cm.

Vi skal dernæst bestemme den vinkelrette afvigelse fra bevægelsesretningen i bevægelsen på den 40 m lange bane, når stenen bliver sendt af sted med en afvigelsen på vinklen er blot 1^0.

$1.0^0\dfrac{\pi}{180}40m = 0{,}70\,m$.

Det har derfor altid undret mig, hvordan curling spillerne bærer sig ad.

Resultaterne er udledt med tanke på curling sten, men de vil også gælde for billard kugler.

4. Billard, hvor begge kugler er i bevægelse før stødet

Hvis begge kugler med ens masse m er i bevægelse før stødet er analysen i CM den samme bortset fra at u_1' er forskellig fra u_2'. Lad os antage at $u_1 = u_1(1{,}0)$, mens $u_2 = -u_2(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}{m_1 + m_2} = \tfrac{1}{2}u_1(1{,}0) - \tfrac{1}{2}u_2(\cos\alpha, \sin\alpha) = \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2\cos\alpha, -u_2\sin\alpha)$$

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_1' + \vec{v}_{CM} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{v}_{CM}$$
$$= u_1(1{,}0) - \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2\cos\alpha, -u_2\sin\alpha) = \tfrac{1}{2}(u_1 + u_2\cos\alpha, u_2\sin\alpha)$$
$$u_1' = \tfrac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\cos\alpha}$$
$$\vec{u}_2 = \vec{u}_2' + \vec{v}_{CM} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2' = \vec{u}_2 - \vec{v}_{CM}$$
$$= (-u_2\cos\alpha, -u_2\sin\alpha) - \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2\cos\alpha, -u_2\sin\alpha) = \tfrac{1}{2}(-u_2\cos\alpha - u_1, -u_2\sin\alpha)$$
$$u_2' = \tfrac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\cos\alpha}$$

Efter stødet i CM-systemet gælder som før $v_1' = u_1' \;\; og \;\; v_2' = u_2'$.

$$\vec{v}_1' = u_1'(\cos\theta, \sin\theta) \quad and \quad \vec{v}_2' = u_2'(-\cos\theta, -\sin\theta)$$

Vi skriver da koordinaterne i laboratorie-systemet. Det er helt det samme som før.

$$\vec{u}_1' = u_1'(1{,}0) \;,\; \vec{u}_2' = u_1'(-1{,}0) \;,$$
$$\vec{v}_1' = u_1'(-\cos(2\theta - 180), -\sin(2\theta - 180))$$
$$\vec{v}_2' = u_1'(\cos(2\theta - 180), \sin(2\theta - 180))$$
$$\vec{v}_1' = u_1'(\cos 2\theta, \sin 2\theta) \;,\; \vec{v}_2' = u_1'(-\cos 2\theta, -\sin 2\theta)$$

Hvis vi sætter $\varphi = 2\theta$, får vi:

$$\vec{v}_1' = u_1'(\cos\varphi, \sin\varphi) \quad og \quad \vec{v}_2' = -u_2'(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

Transformerer vi tilbage til Lab-systemet

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_{CM} = u_1'(\cos\varphi, \sin\varphi) + \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2\cos\alpha, -u_2\sin\alpha)$$
$$= (u_1'\cos\varphi + \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2\cos\alpha), u_1'\sin\varphi - u_2\sin\alpha)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_{CM} = u_2'(\cos\varphi, \sin\varphi) + \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2\cos\alpha, -u_2\sin\alpha)$$
$$= (u_2'\cos\varphi + \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2\cos\alpha), u_2'\sin\varphi - u_2\sin\alpha)$$

Hvor $u_1' = u_2' = \tfrac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\cos\alpha}$

Det er naturligvis muligt at bestemme et udtryk for spredningsvinklen for begge billard kugler, men som det fremgår, bliver udtrykket helt uigennemskuelig.