Bølgeligningen

Indhold

Ole Witt-Hansen Køge Gymnasium 2002

1. Bølgeligningen

For en harmonisk (sinus formet) bølge, der udbreder sig langs en *x*-akse i en retning (dimension), gælder følgende udtryk:

(1.1) $$u(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$u(x,t)$ er udsvinget for en partikel fra en ligevægtsstilling $u(x,t) = 0$ på stedet x til tidspunktet t.
A er amplituden i udsvinget, ω er den cykliske frekvens $\omega = \frac{2\pi}{T}$, hvor T er perioden. k er bølgetallet $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, hvor λ er bølgelængden. $(\omega t - kx + \varphi_0)$ kaldes for fasen og ϕ_0 er begyndelsesfasen.
Ligningen (1.1) er baseret på to grundlæggende observationer for bølger:

1. De udbreder sig med konstant hastighed v.
2. Bølgens form er uændret ved udbredelsen.

Udtrykket for en harmonisk bølge kan da udledes, hvis vi antager, at vi har en harmonisk svingning ved $x = 0$:

$$u(0,t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Ifølge (1) og (2) kan vi derfor udtrykke, at udsvinget på stedet x til tidspunktet t:

Er det samme udsving, som vi havde på stedet $x = 0$, *men på et tidligere tidspunkt, nemlig så meget tidligere, som det tager bølgen at bevæge sig stykket* x.

Skrevet formelt

(1.2) $$u(x,t) = u(0, t - \frac{x}{v}) \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = A\cos(\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi_0) = A\cos(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi_0)$$

Indføres bølgetallet: $k = \frac{\omega}{v}$, opnår vi udtrykket (1.1).
Der findes en del relationer mellem de symboler som karakteriserer bølgeudbredelse.

Hastighed: v, bølgelængde: λ , vinkelfrekvensen: ω, frekvensen: ν, og perioden: T, som relativt let kan verificeres.

(1.3) $$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad v = \lambda \cdot \nu \ \Leftrightarrow \ v = \frac{\lambda}{T} \ \Leftrightarrow \ v = \frac{\omega}{k}$$

Et ikke nødvendigvis harmonisk bølgefænomen, hvor "bølgens form" er givet ved et udtryk $u(0,t) = f(t)$, kan repræsenteres ved en funktion:

(1.4) $$u(x,t) = u(0, t - \frac{x}{v}) = f(t - \frac{x}{v})$$

Alle endimensionale bølgefænomener, tilfredsstiller den såkaldte bølgeligning:

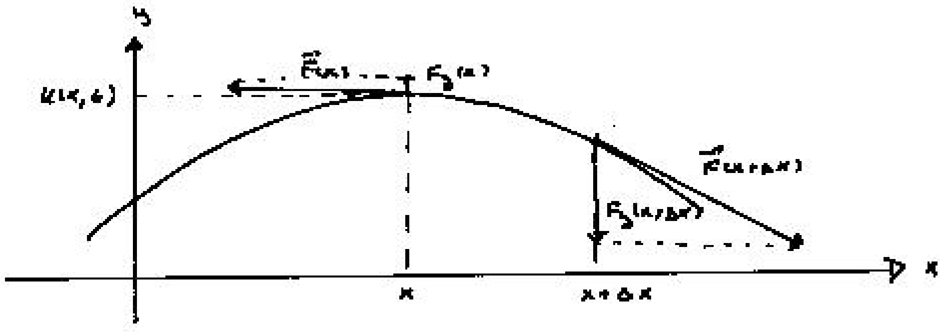
(1.5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Symbolet ∂ betegner *partiel differentiation* af en funktion af flere variable. Partiel differentiation er det samme som normal differentiation med hensyn til en variabel, men hvor de øvrige variable betragtes som konstanter.
At udtrykkene (1.1) og (1.3) begge opfylder denne ligning, er let at verificere ved differentiation.
Omvendt: Hvis man har et fænomen, der kan beskrives ved en funktion $u(x,t)$, der opfylder (1.4) skrevet på formen:

(1.6) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Så er fænomenet et bølgefænomen med en udbredelseshastighed $v=1/c$.
I det følgende, vil vi betragte forskellige fænomener, og udlede, at de opfylder en bølgeligning (1.6). Af denne ligning kan vi da slutte os til et udtryk for udbredelseshastigheden.

2. Udbredelseshastigheden for bølger på en elastisk streng



Vi betragter et lille stykke Δx mellem x og $x+\Delta x$ af en elastisk streng i svingninger.
Strengen er spændt ud langs med x-aksen og forskydningen $u(x,t) = y(x,t)$ er i y-aksens retning.
Vi ser bort fra tyngdekraften, så det lille stykke Δx er kun påvirket af kræfter $F(x)$ og $F(x+\Delta x)$.
Begge disse kræfter er rettet langs tangenten af kurven $u(x,t)$.
Vi ser endvidere bort fra de små forskelle, der er snorspændingen F langs med strengen.
Komposanterne af F i x-retningen, går ud mod hinanden. Komposanterne i y-retning kan bestemmes som $F\sin\theta$, hvor θ er tangenthældningen. For små θ er imidlertid $\sin\theta \simeq \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$ (tangenthældningen). For kraften i y-retningen finder man derfor:

(2.1) $$F_{yres} = \Delta F = F_y(x+\Delta x) - F_y(x)$$

$$\Delta F = F\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - F\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} \approx F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$$

Den resulterende kraft er lig med massen gange accelerationen af det stykke af strengen, der befinder sig mellem x og $x+\Delta x$. Hvis massen pr. længdeenhed er μ er $m = \mu\Delta x$. Vi finder derfor:

(2.2)
$$F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x = \mu\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Sammenligner man med bølgeligningen, ser man at udbredelseshastigheden v er givet ved:

(2.3)
$$\frac{1}{v^2} = \frac{\mu}{F} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

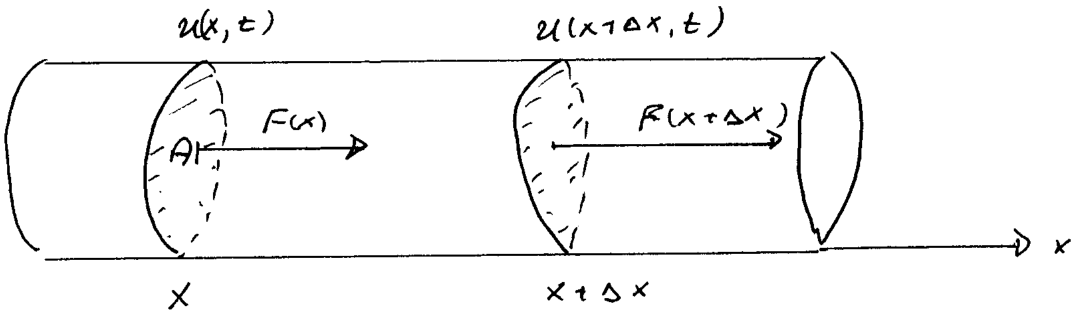
Hvilket var det ønskede udtryk.

3. Udbredelseshastigheden for longitudinalbølger i faste elastiske stoffer

Udtrykket for udbredelseshastigheden for longitudinalbølger i elastiske stoffer er baseret på Hookes lov:
Har man et elastisk stof med tværsnitsareal A, længde L, som påvirkes af en kraft F, og dermed forlænges stykket x, gælder Hookes lov:

(3.1)
$$F = E\frac{A}{L}x$$

E kaldes for Youngs modul. Den skrives også som Y.



Vi betragter nu et stykke af en sådan streng, som opfylder Hookes lov. Hvis der udbreder sig en bølge i stoffet er tilstanden dynamisk, og kraftpåvirkningen ved x og $x+\Delta x$ er ikke den samme. (Se figuren nedenfor). Udsvinget af en partikeldel fra en ligevægtsstilling, vil vi som hidtil betegne med $u(x,t)$. Udsvinget er nu blot langs med bølgens udbredelsesretning – altså i x-retningen.

Ræsonnementet er det samme som gennemført ovenfor for transversalbølger. Vi udregner den resulterende kraft på stykket Δx og sætter den lig med massen gange accelerationen af det stykke, der befinder sig mellem x og $x+\Delta x$.
For at opstille udtrykket anvender vi Hookes lov med $L = \Delta x$ og $x = u(x+\Delta x,t) - u(x,t)$. Længden af stoffet er Δx og deformationen i x-retningen er forskellen mellem forskydningerne ved $x+\Delta x$ og x.

$$F(x) = \frac{EA}{\Delta x}(u(x+\Delta x,t) - u(x,t)) \approx EA\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$F_{res} = F(x+\Delta x) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x = EA\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Betegner ρ massefylden for stoffet, er massen *m* af stoffet mellem *x* og *x*+*Δx* lig med $m = \rho A \Delta x$.
Newtons 2. lov: $F_{res} = ma$ giver derfor:

$$F_{res} = EA\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow$$

(3.2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Sammenlignes med bølgeligningen, finder man herefter det ønskede udtryk for udbredelseshastigheden.

(3.3) $$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

4. Lydens hastighed i gasser

En direkte udledning af udtrykket for lydens hastighed i gasser er ret kompliceret. Vi vil her foretage en udledning, der er baseret på udtrykket ovenfor for longitudinalbølger.
Vi omskriver først Hookes lov på differentialform, idet vi ønsker at finde sammenhængen mellem en lille ændring af rumfanget *ΔV*, som følge af en lille trykændring *ΔP*.

(4.1) $$F = E\frac{A}{L}x \Rightarrow \Delta F = -E\frac{A}{x}\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta F}{A} = -E\frac{A\Delta x}{xA} \Rightarrow \Delta P = -E\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{E}{V}$$

Minustegnet fremkommer, fordi *ΔP* og *ΔV* har forskelligt fortegn. En trykforøgelse resulterer i en rumfangsformindskelse.
Ud fra udtrykket ovenfor er man nu i stand til at finde et udtryk for modulen *E*. (Som ikke længere kan betragtes som Youngs modul).
Dette udtryk kan så indsættes i udtrykket (3.3) til bestemmelse af udbredelseshastigheden.

(4.2) $$E = -V\frac{\partial P}{\partial V}$$

Dette vil vi anvende på en idealgas. For en sådan gas gælder tilstandsligningen:

(4.3) $$PV = nRT$$

For sammenhængen mellem tryk P og Rumfang V gælder for *isoterme* ændringer: *PV = konst*.

Anvender man denne relation, får man imidlertid ikke et korrekte udtryk for lydens hastighed.

Årsagen er, at ved lydudbredelse er ændringerne i gassens tilstand *ikke* isoterme (svingningerne er så hurtige, at der ikke når at ske en temperaturudligning), men *adiabatiske* (varmeisoleret).

Vi kan derfor ikke anvende Boyle-Mariottes lov, men den tilsvarende lov for adiabatiske ændringer.

Vi tager udgangspunkt i varmeteoriens 1. hovedsætning, som vi opskriver på differentialform.

(4.4) $$dE = dQ + dA$$

Den tilførte varme dQ til et system plus det udførte arbejde på systemet er lig med tilvæksten i systemets indre energi..
For en idealgas afhænger energien kun af Kelvintemperaturen og er givet ved udtrykket:

(4.5) $$E_{kin} = \gamma NkT = \gamma nRT \quad \Rightarrow \quad dE = \gamma nRdT$$

N er antallet af molekyler, k er Boltzmanns konstant, n er antal mol af gassen og R er gaskonstanten.
γ er en konstant, der afhænger af gassen, og som er 3/2 for en enatomig gas.

"Stempelarbejdet" er $dA = -PdV$. Adiabatisk betyder at $dQ = 0$, heraf følger ligningen

(4.6) $$dE = dA \Rightarrow \gamma nRdT = -PdV \Rightarrow \gamma nRdT + PdV = 0$$

Indsætter man nu i denne ligning $nRdT$ ud fra tilstandsligningen på differential form:

$$d(PV) = nRdT \Leftrightarrow PdV + VdP = nRdT$$ får man:

(4.7) $$\gamma PdV + \gamma VdP + PdV = 0 \Rightarrow \tfrac{(\gamma+1)}{\gamma}\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \Rightarrow \kappa\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

Integreres den sidste ligning får man

(4.8) $$\ln V^{\kappa} + \ln P = konst \Leftrightarrow PV^{\kappa} = konst$$

Dette er den ønskede adiabatiske relation, hvoraf vi kan finde $E = -V\frac{\partial P}{\partial V}$. Vi tager derfor differentialet af relationen (4.8)

(4.9) $$V^{\kappa}dP + \kappa PV^{\kappa-1}dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial V} = -\kappa\frac{P}{V}$$

Endelig finder vi da:

(4.10) $$E = -V\frac{\partial P}{\partial V} = \kappa P$$

Udtrykker vi nu P ved hjælp af tilstandsligningen:

(4.11) $$P = \frac{nRT}{V} = \frac{nMRT}{VM} = \frac{m}{V}\frac{RT}{M} = \rho\frac{RT}{M}$$

Dette udtryk, vil vi nu indsætte i formlen for udbredelseshastigheden (3.3)

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa\rho\frac{RT}{M}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}$$

Vi finder derfor udtrykket for lydens ubredelseshastighed i gasser

(4.11) $$v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} \quad \text{hvor} \quad \kappa = \frac{\gamma + 1}{\gamma}$$

γ kan for forskellige gasser findes i en håndbog over fysiske konstanter.
For atmosfærisk luft er γ =1.4.