Alle ved, at hvis man lægger en kugle på en roterende plade eller på en karrusel, så vil den bevæge sig ud mod kanten. Vi vil stille os den opgave at finde den banekurve, som kuglen vil følge.

Det viser sig at problemet er en del mere kompliceret end man først skulle tro. Det skyldes ikke mindst at der foruden centripetalkraften også optræder corioliskraften.
Vi vil dog ikke angribe problemet ved en analyse af de virkende kræfter, men ved en direkte dynamisk analyse.

Årsagen til, at kuglen bevæger sig ud mod kanten, formuleres ofte som en følge af en udadrettet centrifugalkraft. Problemet med dette er blot at centrifugalkraften ikke eksisterer.
Centrifugalkraften er en såkaldt fiktiv kraft, som er en følge af at kuglen befinder sig i et accelereret koordinatsystem. Centrifugalkraften er en konsekvens af en manglende centripetalkraft til at opretholde cirkelbevægelsen.
I et accelereret koordinatsystem, kan man ikke anvende Newtons love uindskrænket.

Vi skal derfor anvende et inertialsystem, dvs. et koordinatsystem, som er i hvile i forhold til den roterende plade.

Vi indlægger et koordinatsystem med centrum i skivens omdrejningsakse.
Bevægelsen af et fast punkt $\vec{r} = (x, y)$ på skiven er givet ved formlerne for den jævne cirkelbevægelse. $\vec{r} = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$. Et objekt anbragt i dette punkt er påvirket af den resulterende kraft, som er centripetalkraften: $F_c = m\omega^2 r$.
Når punktet ikke ligger fast, betyder det egentlig blot, at afstanden til kuglen fra centrum afhænger af tiden. $r = r(t)$.
Under denne antagelse differentierer vi udtrykket $\vec{r} = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ to gange med hensyn til tiden for at bestemme den øjeblikkelige acceleration.

Anvender man udtrykket $\vec{r} = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$, er det imidlertid ret omstændeligt at gennemføre regningerne. Det er langt lettere, at anvende den komplekse eksponentialfunktion, hvor y koordinaten så er den imaginære del. Vi skriver derfor: $\vec{r} = re^{i\omega t} = r\cos\omega t + ir\sin\omega t$.

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}e^{i\omega t} + ri\omega e^{i\omega t} \qquad og \qquad \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}e^{i\omega t} + \dot{r}i\omega e^{i\omega t} + \dot{r}i\omega e^{i\omega t} - r\omega^2 e^{i\omega t}$$

Vi sætter derefter dette lig med centripetalaccelerationen: $\vec{a}_c = \omega^2 re^{i\omega t}$, som resulterer i følgende differentialligning:

$$\ddot{r}e^{i\omega t} + 2\dot{r}i\omega e^{i\omega t} - r\omega^2 e^{i\omega t} = r\omega^2 e^{i\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{r}e^{i\omega t} + 2\dot{r}i\omega e^{i\omega t} - 2r\omega^2 e^{i\omega t} = 0$$

For at løse denne ligning sætter vi $r = e^{kt}$, hvor k godt kan være et komplekst tal. Dette giver så ligningen:

$$k^2 e^{kt} e^{i\omega t} + ke^{kt} i\omega e^{i\omega t} - 2e^{kt}\omega^2 e^{i\omega t} = 0$$

Ved division med $e^{kt}e^{i\omega t}$ får man da en andengradsligning i k.

$$k^2 + ik\omega - 2\omega^2 = 0$$

Diskriminanten er: $d = -\omega^2 + 8\omega^2 = 7\omega^2$, og dermed:

$$k = i\frac{\omega}{2} \pm \sqrt{7}\frac{\omega}{2}$$

Af de to løsninger vælger vi fortegnet plus for omega, idet den anden løsning ville betyde en bevægelse mod centrum af skiven. Vi får da

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{\frac{\sqrt{7}}{2}\omega t + i\frac{\omega}{2}t} e^{i\omega t} = \vec{r}_0 e^{\frac{\sqrt{7}}{2}\omega t} e^{i(\omega + \frac{\omega}{2})t} = \vec{r}_0 e^{\frac{\sqrt{7}}{2}\omega t} e^{i\frac{3\omega}{2}t}$$

Skrevet ud i koordinater:

$$(x, y) = (r_0 e^{\frac{\sqrt{7}}{2}\omega t} \cos(\tfrac{3}{2}\omega t), r_0 e^{\frac{\sqrt{7}}{2}\omega t} \sin(\tfrac{3}{2}\omega t))$$

Dette ses i øvrigt at være en parameterfremstilling for en logaritmisk spiral. Sætter vi nemlig:

$$s = e^{\frac{\sqrt{7}}{2}\omega t} \quad \Rightarrow \quad \ln s = \frac{\sqrt{7}}{2}\omega t \quad \Rightarrow \quad \omega t = \frac{2}{\sqrt{7}}\ln s \text{, så finder vi:}$$

$$(x, y) = (r_0 s \cos(\tfrac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{7}}\ln s), r_0 s \sin(\tfrac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{7}}\ln s)),$$

altså en parameterfremstilling af formen: $(x, y) = (at\cos(\alpha \ln t), bt\sin(\alpha \ln t))$, som er den mest almindelige fremstilling for en logaritmisk spiral.

Det bemærkes i øvrigt, at formen af banekurven kun afhænger af ωt, så hvis man forøger vinkelhastigheden med en faktor 10, og samtidig reducerer t med en faktor 10, så er banekurven uændret. Alle banekurver er ens, bortset fra en ret affinitet.

Vi vil nu grafisk vise banekurven for en kugle, der gnidningsfrit bevæger sig på en roterende skive. Formen viser ret tydeligt en logaritmisk spiral.

Vi har dermed løst problemet: Find banekurven for et legeme, der bevæger sig gnidningsfrit på en roterende skive. Legemet vil bevæge sig langs en logaritmisk spiral, og vil relativt hurtigt nå kanten. De to grafer repræsenterer forskellige rotationshastigheder. Men det er den samme kurve.