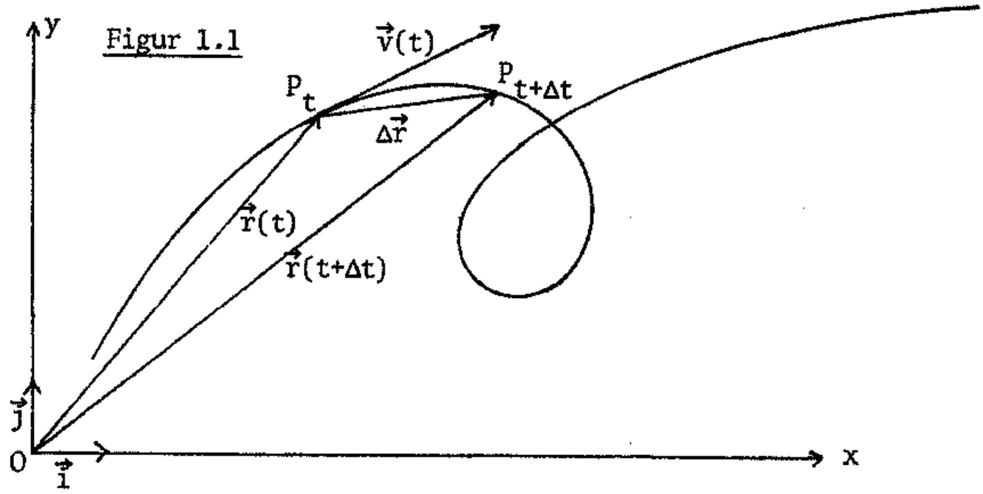
KAP. II PLAN BEVÆGELSE AF EN PARTIKEL.

1. BEVÆGELSE I PLANEN.

Hvis man skal beskrive en partikels bevægelse i en plan, kan det gøres ved at indlægge et retvinklet koordinatsystem $(O, \vec{i}, \vec{j})$ i planen. Partiklens position til tidspunktet t vil vi betegne P_t. Positionen kan fastlægges ved at angive stedvektoren $\vec{OP}_t$.

Figur 1.1



Når stedvektoren $\vec{OP}_t$ varierer med tiden skriver man normalt,

(1.2) $$\vec{r}(t) = \vec{OP}_t$$

$\vec{r}(t)$ kaldes da for en <u>vektorfunktion</u>. Den kan udtrykkes i koordinater:

(1.3) $$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

x(t) og y(t) betegner da almindelige reelle funktioner af tiden.
På figur (1.1) er skitseret grafen for vektorfunktion svarende til en bevægelse i planen langs den givne kurve.
Når kurven er sammenhængende kaldes vektorfunktionen $\vec{OP}_t = \vec{r}(t)$ for kontinuert. Dette er altid tilfældet, når vektorfunktionen beskriver en bevægelse.

Kap II

2. HASTIGHED OG FART I DEN PLANE BEVÆGELSE.

Vi betragter positionerne P_t og $P_{t+\Delta t}$ af en partikel til tidspunkterne t og t+Δt, hvor Δt som sædvanlig betegner en lille positiv eller negativ tilvækst. Se figuren side 17.
I løbet af tidsrummet Δt får partiklen en forskydning

$$\overrightarrow{P_t P}_{t+\Delta t} = \overrightarrow{OP}_{t+\Delta t} - \overrightarrow{OP}_t = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}$$

For at definere hastigheden i en plan (ikke retlinet) bevægelse, betragter vi brøken

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Eller skrevet ud i koordinater

$$(2.1) \qquad \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\ \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

Denne brøk er en vektor, der er proportional med $\Delta\vec{r}$. $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ kan opfattes som en slags middelhastighed i tidsintervallet Δt.

2.2 Definition

Vi definerer nu hastighedsvektoren $\vec{v}(t)$ til tidspunktet t som grænseværdien af brøken $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ for Δt gående imod nul.
Grænseværdien kaldes, hvis den eksisterer, for differentialkvotienten af vektorfunktionen $\vec{r}(t)$. Man skriver dette:

$$(2.2) \qquad \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \to \vec{v}(t) \quad \text{for } \Delta t \to 0 \quad \text{eller} \quad \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}(t)$$

Man benytter også for vektorfunktioner skrivemåden

$$(2.3) \qquad \vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) \quad \text{eller} \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Skrevet ud i koordinater, følger det af (2.1).

$$(2.4) \qquad \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$$

I (2.4) har vi indsat $v_x(t) = x'(t)$ og $v_y(t) = y'(t)$, idet hastighederne i x og y retning beregnes som differentialkvotienterne af de tilsvarende koordinatfunktioner.

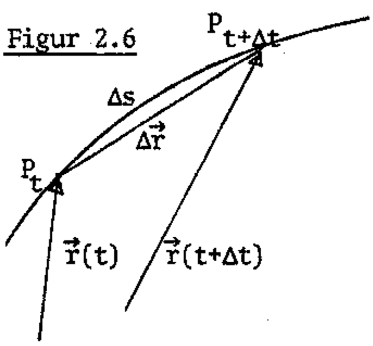
For bevægelse i planen er hastigheden en vektor. Vi vil nu vise, hvorledes man kan bestemme retningen af denne vektor på figur (1.1). Linien gennem punkterne P_t og $P_{t+\Delta t}$ vil være en sekant til kurven. For Δt gående mod nul vil denne sekant have en grænsestilling, hvor punkterne P_t og $P_{t+\Delta t}$ er sammenfaldende.
En sådan grænsestilling af en sekant kaldes for en tangent.
Da vektoren $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{P_t P_{t+\Delta t}}$ er parallel med sekanten, følger det at hastighedsvektoren $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ vil have en retning langs med tangenten til banekurven.

Farten i bevægelsen er defineret som længden af hastighedsvektoren

$$(2.5) \qquad v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

At (2.4) er i overensstemmelse med den sædvanlige definition af fart som tilbagelagt vej pr. tidsenhed kan indses som følger.

Figur 2.6



Når $\Delta\vec{r}$ er en lille tilvækst, er længden af $\Delta\vec{r}$ med tilnærmelse lig med buelængden Δs fra P_t til $P_{t+\Delta t}$.
Idet $\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y)$ finder man:

$$\Delta s \approx |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Ved division med Δt finder man den tilbagelagte buelængde (vej) pr. tidsenhed altså farten.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

Ved at lade Δt gå imod nul finder man således

Kap II

(2.7) $$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Som det fremgår, er (2.7) i overensstemmelse med definitionen (2.5).

2.8 Eksempel. Vi betragter en bevægelse givet ved vektorfunktionen:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + 3 \\ -3t + 1 \end{pmatrix}$$

For overskuelighedens skyld udelades enhederne, idet vi konsekvent regner i S.I. enheder.
Differentieres koordinatudtrykket med hensyn til tiden bestemmes hastighedsvektoren.

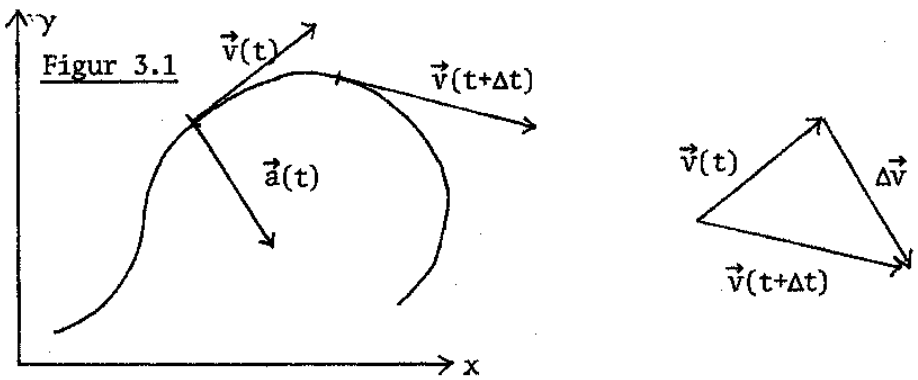
$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bevægelsen har konstant hastighedsvektor, d.v.s. den er jævn og retlinet. Dette er i overensstemmelse med, at koordinatudtrykket er parameterfremstilling for en ret linie med retningsvektor (2,-3). Liniens ligning er $3x + 2y - 11 = 0$.

3. ACCELERATION I DEN PLANE BEVÆGELSE

Vi har hidtil defineret accelerationen som hastighedstilvæksten pr. tidsenhed. Denne definition vil vi fastholde, men for bevægelse i planen bliver accelerationen en vektor.

Figur 3.1



På figuren er skitseret hastighedsvektorerne $\vec{v}(t)$ og $\vec{v}(t+\Delta t)$ til tidspunkterne t og t+Δt. På figuren til højre er vektorerne afsat ud fra samme punkt, hvor også hastighedstilvæksten $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$ er markeret.
Middelaccelerationen i tidsintervallet Δt kan udtrykkes som hastighedstilvæksten pr. tidsenhed.

$$(3.2) \qquad \vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{v_x(t+\Delta t)-v_x(t)}{\Delta t} \\ \frac{v_y(t+\Delta t)-v_y(t)}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

3.3 Definition:

Accelerationsvektoren $\vec{a}(t)$ til tidspunktet t defineres som grænseværdien af brøken $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ for Δt gående mod nul.

$$(3.3) \qquad \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \to \vec{a}(t) \quad \text{for} \quad \Delta t \to 0 \quad \text{eller} \quad \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}(t)$$

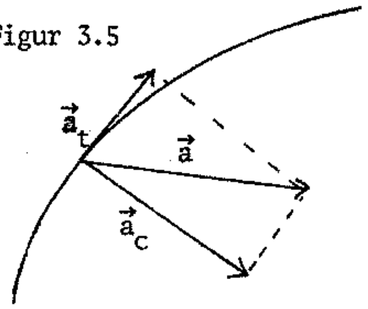
Det følger af definitionen, at accelerationsvektoren skal beregnes som differentialkvotienten af hastighedsvektoren eller som den 2. afledede af positionsvektoren.

$$(3.4) \qquad \vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) \quad \text{eller} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Eller skrevet ud i koordinater

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x'(t) \\ v_y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

Figur 3.5



Accelerationsvektoren $\vec{a} = \vec{a}(t)$ kan opløses i en komposant langs med tangenten til banekurven, som kaldes for tangentialaccelerationen og en komposant vinkelret på tangenten (d.v.s langs med normalen), som kaldes for centripetalaccelerationen.

$$(3.6) \qquad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

Kap II

Betydningen af tangential- og centripetalacceleration er følgende. Det er tangentialaccelerationen, der giver fartforøgelsen langs banekurven, d.v.s. ændrer længden af hastighedsvektoren, mens centripetalaccelerationen ændrer retningen af hastighedsvektoren.

3.7 Eksempel. En partikel bevæger sig langs en kurve givet ved vektorfunktionen. Der regnes i S.I. enheder, som udelades.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - 3 \\ -5t^2 + 3t + 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestem hastigheds- og accelerationsvektoren.

b) Bestem position og hastighed til tidspunkterne $t = 1\,s$ og $t = 2\,s$.

c) Beregn farten til tidspunkterne $t = 0\,s$ og $t = 1\,s$.

d) Undersøg om der er tidspunkter, hvor hastigheds- og accelerationsvetorerne står vinkelret på hinanden.

Løsning: Hastigheds- og accelerationsvektorerne findes ved at differentiere positionsvektoren.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -10t + 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Det bemærkes, at accelerationsvektoren er en konstant vektor. Der er derfor tale om en ikke retlinet bevægelse med konstant acceleration.

b) Vi finder ved indsætning af de opgivne tidspunkter.

$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -17 \end{pmatrix}$$

c) Farten til tidspunktet t er givet ved udtrykket

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + (-10t+3)^2} \quad \text{hvoraf man finder}$$

$$v(0) = \sqrt{13} = 3{,}6\ m/s \qquad v(1) = \sqrt{53} = 7{,}3\ m/s$$

Kap II

Hvis kraften $\vec{F}$ på en partikel er vinkelret på partiklens hastighed $\vec{v}$, er kraftens effekt $\vec{F}\cdot\vec{v} = 0$. Der udføres da intet arbejde på partiklen, og partiklen får ingen tilvækst i kinetisk energi.

Opløser man accelerationen $\vec{a}$ i en tangential-komposant og en centripetal-komposant, finder man tilsvarende udtryk for tangentialkraft og centripetalkraft.

(4.5) $\quad F_t = ma_t$ (tangential) $\quad F_c = ma_c$ (centripetal)

Betydningen af disse to kræfter kan f.eks. forstås ud fra bilkørsel. Det er tangentialkraften, der ændrer bilens fart. Tangentialkraften reguleres derfor på speeder og bremse.
Skal man gennemkøre en kurve med konstant fart, har man derimod kun brug for en sideværts (d.v.s. vinkelret på hastighedsvektoren) kraftpåvirkning. Denne kraft er netop centripetalkraften, der som bekendt kan reguleres ved drejning på rattet.
Det er egentlig friktionskraften mellem hjul og vejbane, der leverer såvel tangential- som centripetalkraft. Kommer man ind på et glat stykke, mens man er midt i en kurve, forsvinder centripetalkraften, og man vil fortsætte langs den øjeblikkelige hastighedsvektor. "Man ryger ud langs tangenten".

5. EKSEMPLER PÅ SIMPLE PLANE BEVÆGELSER.

En jævn retlinet bevægelse er karakteriseret ved at accelerationsvektoren $\vec{a} = \vec{0}$ til alle tidspunkter, hvilket medfører et hastighedsvektoren $\vec{v} = \vec{v}_0$ er en konstant vektor. Er positionen $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ til tidspunktet $t = 0\,s$, gælder derfor bevægelsesligningerne:

$$\boxed{(5.1) \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{xo}t + x_0 \\ v_{yo}t + y_0 \end{pmatrix}}$$

Formlerne (5.1) angiver blot ligningerne for en jævn retlinet bevægelse i såvel x-retning som y-retning.

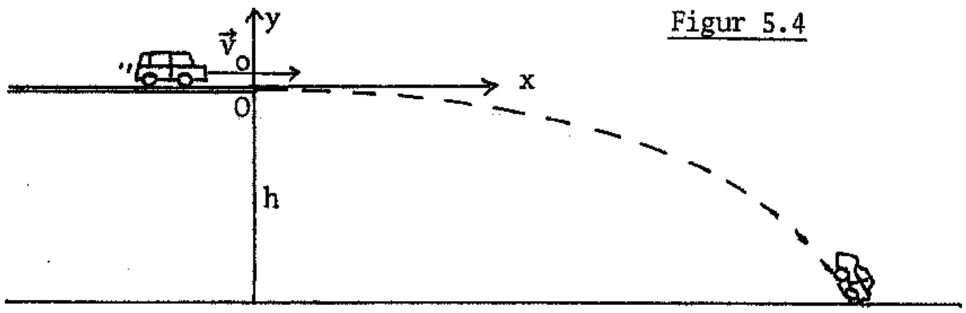
En konstant accelereret bevægelse er karakteriseret ved at accelerationsvektoren $\vec{a} = (a_x, a_y)$ er en konstant vektor, som ikke er $\vec{0}$.
Partiklen bevæger sig altså med konstant acceleration a_x i x-retningen og med konstant acceleration a_y i y-retningen.
Hvis $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ og $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ er henholdsvis hastigheden og positionen til tidspunktet $t = 0$, følger bevægelsesligningerne umiddelbart fra ligningerne for en retlinet bevægelse med konstant acceleration, som er angivet på side 16.

(5.2) $$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x t + v_{0x} \\ a_y t + v_{0y} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 \\ \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0 \end{pmatrix}$$

Ligningerne (5.2) skrives kortere på vektorform.

(5.3) $$\vec{v} = \vec{a}\,t + \vec{v}_0 \quad \text{og} \quad \vec{r} = \tfrac{1}{2}\vec{a}\,t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

5.4 Eksempel. Vandret kast



Figur 5.4

Et frit fald med vandret begyndelseshastighed kaldes for et vandret kast. Det kan f.eks. realiseres ved at en bil kører ud over en afgrund, som vist på figuren.
Med det indlagte koordinatsystem er begyndelsesbetingelserne følgende:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bevægelsen er konstant accelereret, og vi kan direkte indsætte i bevægelsesligningerne (5.2).

Kap II

(5.4.1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_o \\ -gt \end{pmatrix}$ og $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_o t \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$

Ud fra bevægelsesligningerne vil vi udregne forskellige ting.
a) Positionen, hvor bilen knuses mod afgrundens bund.
b) Farten lige før den rammer bunden.
c) Vise, at den mekaniske energi er bevaret under hele "styrtet".

a) Vi bestemmer først tidspunktet for kollisionen med bunden.
Indsættes $y = -h$ (dybden af afgrunden) i (5.4.1) fås:

$$-h = -\tfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{som indsættes i } x = v_o t$$

Herved finder man den ønskede position: $(x,y) = (v_o\sqrt{\frac{2h}{g}}, -h)$
b) Hastigheden til tidspunktet, hvor den rammer bunden findes også ved at indsætte i (5.4.1).

$$v = \begin{pmatrix} v_o \\ -\sqrt{2hg} \end{pmatrix} \quad \text{og dermed farten} \quad v = \sqrt{v_o^2 + 2gh}$$

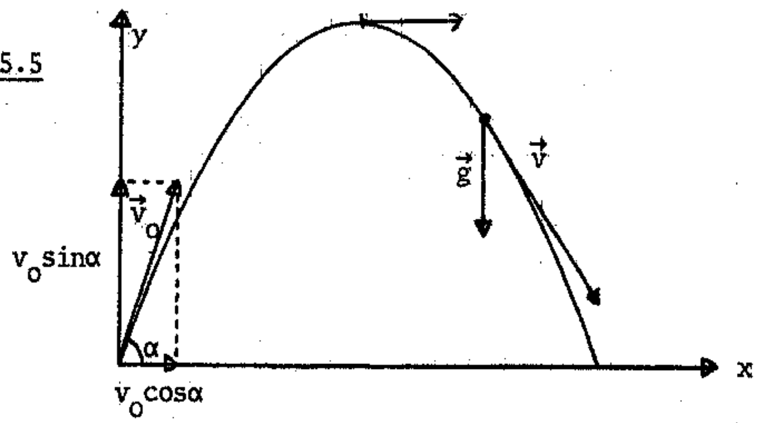
c) Vi udregner summen af kinetisk og potentiel energi til et vilkårligt tidspunkt under "styrtet".

$$\begin{aligned} E_{kin} + E_{pot} &= \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = \tfrac{1}{2}m(v_o^2 + (gt)^2) + mg(-\tfrac{1}{2}gt^2) \\ &= \tfrac{1}{2}mv_o^2 \quad \text{(Konstant til ethvert tidspunkt)} \end{aligned}$$

5.5 Eksempel Det skrå kast
I det skrå kast affyres en partikel med en begyndelseshastighed $\vec{v}_o$, der danner en vis vinkel α med vandret.
Vi vil se bort fra en eventuel luftmodstand, idet partiklen da udelukkende er påvirket af den konstante tyngdekraft $\vec{F}_T = m\vec{g}$.
Koordinatsystemet indlægges som vist på figuren næste side.
Begyndelsesbetingelserne er da givet ved:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_o = \begin{pmatrix} v_o\cos\alpha \\ v_o\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Figur 5.5



Bevægelsen er åbenbart med konstant acceleration. Hastigheds- og koordinatfunktionerne bestemme ved at indsætte i formlerne (5.2).

(5.5.1) $$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_o\cos\alpha \\ v_o\sin\alpha - gt \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_o\cos\alpha\, t \\ v_o\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

For det skrå kast vil vi nu bestemme følgende:

a) Ligningen for banekurven.

b) Stighøjden, d.v.s. partiklens maximale højde under kastet.

c) Kastevidden, d.v.s. kastets længde.

d) Vise at den mekaniske energi er bevaret under kastet.

a) Banekurven bestemmes ved at eliminere t i koordinatudtrykkene.

$$x = v_o\cos\alpha t \Rightarrow t = \frac{x}{v_o\cos\alpha} \quad \text{indsættes i } y = v_o\sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

(5.5.2) $$y = \operatorname{tg}\alpha\, x - \frac{\frac{1}{2}g}{(v_o\cos\alpha)^2}x^2 \Rightarrow \quad y = ax^2 + bx$$

Af ligningen (5.5.2) fremgår det, at banekurven er en parabel, hvor grenene vender nedad, en såkaldt *<u>kasteparabel</u>.*

b) Den højeste position nåes, når partiklen vender, d.v.s. når $v_y=0$.

$$v_y = 0 \Leftrightarrow v_o\sin\alpha\, t - gt = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_o\sin\alpha}{g}$$

Dette tidspunkt indsættes så i koordinatudtrykket for y.

Kap II

(5.5.3) $y = v_o\sin\alpha\frac{v_o\sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}g(\frac{v_o\sin\alpha}{g})^2 \Leftrightarrow y_{max} = \frac{(v_o\sin\alpha)^2}{2g}$

c) For at bestemme kastevidden, udregner vi de tidspunkter hvor $y=0$.

$$y = 0 \Leftrightarrow v_o\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Leftrightarrow t(v_o\sin\alpha - \frac{1}{2}gt) = 0 \Leftrightarrow$$

$t = 0 \vee t = \frac{2v_o\sin\alpha}{g}$ $\quad t = 0$ er affyringstidspunktet. Det andet tidspunkt må være nedslagstidspunktet. Det indsættes i koordinatudtrykket for x.

(5.5.4) $x = v_o\cos\alpha\, t \Rightarrow x = \frac{v_o^2\, 2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_o^2\sin2\alpha}{g}$ (Kastevidde)

Af udtrykket ovenfor fremgår det, at kastevidden bliver maximal, når $\sin2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^o$. Med en given udgangsfart vil man således opnå det længste kast, hvis man anvender en kastevinkel på 45^o.

d) Vi forventer naturligvis, at den mekaniske energi er bevaret under kastet, men det kan også vises ved direkte udregning.

$$E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mgy$$

$$= \frac{1}{2}m((v_o\cos\alpha)^2 + (v_o\sin\alpha - gt)^2) + mg(v_o\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2)$$

$$= \frac{1}{2}mv_o^2$$

Den mekaniske energi veksler mellem kinetisk og potentiel energi, men summen er konstant lig med den kinetiske energi til $t = 0$.

5.6 Opgaver.

1) Om en kanon oplyses, at den har en maximalrækkevidde på 5,0 km. Idet man ser bort fra luftmodstand (hvad man egentlig ikke kan i dette tilfælde), skal man beregne:

a) Udgangsfarten af projektilet.

b) Stighøjden, når maximalrækkevidden nåes.

c) Tidsforskellen mellem kanonbragets og projektilets ankomst til nedslagsstedet. Hvad kommer først? (Lydhastighed sættes til 340 m/s

2) På et bord med højden 80 cm triller en kugle ud over bordkanten med en hastighed på 2,0 m/s .

a) Angiv positionen hvor kuglen rammer gulvet.

b) Angiv tidspunktet for nedslaget.

c) Angiv kuglens fart og nedslagsvinkel ved nedslaget.

3) En jetjager passerer et raketbatteri med en vandret hastighed på 1800 km/h og i en højde af 8,0 km . Raketterne affyres med en hastighed på 2,0 km/s .

a) Under hvilken vinkel skal raketten affyres for at ramme, når affyringen sker, når jageren er lodret over raketbatterierne.

b) Angiv positionen og tidspunktet, hvor jageren rammes af raketten.

4) En spydkaster sender sit spyd afsted med en kastevinkel på 30^o. Han opnår herved et kast på 72 m . Idet man ser bort fra niveauforskellen mellem nedslagssted og affyringssted, skal man beregne:

a) Udgangsfarten af spyddet.

b) Hvor langt kastet ville have været, hvis kastevinklen havde været 45^o.

6. JÆVN CIRKELBEVÆGELSE.

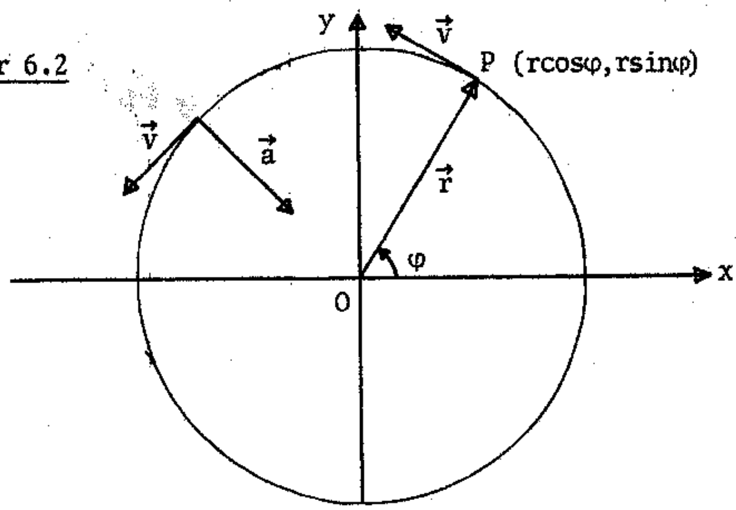
En cirkelbevægelse er en bevægelse, der foregår på eller langs med periferien af en cirkel. Se figuren næste side.
Hvis φ betegner drejningsvinklen ud fra 1. aksen, kan cirkelbevægelsen beskrives ved stedvektoren $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

(6.1) $$\vec{r} = (r\cos\varphi \,,\, r\sin\varphi)$$

Da radius $r = |\vec{r}|$ er konstant, er bevægelsen udelukkende karakteriseret ved drejningsvinklen $\varphi = \varphi(t)$.

Kap II

Figur 6.2



Cirkelbevægelsen kaldes for jævn, hvis φ er en lineær funktion af tiden.

(6.3) $$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

ω er en konstant, som kaldes for cirkelbevægelsens vinkelhastighed. φ_0 er drejningsvinklen til tidspunktet $t = 0$. Den kaldes for begyndelsesfasen, idet drejningsvinklen φ ofte kaldes for fasen.
Normalt vælger man $\varphi_0 = 0$. I dette tilfælde bliver $\varphi = \omega t$.
ω kan karakteriseres som vinkeltilvæksten pr. tidsenhed. Er φ_1 og φ_2 drejningsvinklerne til tidspunkterne t_1 og t_2 fås:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1 = \omega t_1 + \varphi_0\\ \varphi_2 = \omega t_2 + \varphi_0\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = \omega(t_2 - t_1) \Rightarrow \omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} \Leftrightarrow$$

(6.4) $$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Drejningsvinklen måles i radianer, og vinkelhastigheden måles derfor i radianer pr. sekund. Da radianer jo ikke er én enhed for nogen fysisk størrelse, kan man også anvende enhederne pr. sek. eller s^{-1} = Hz for vinkelhastighed.
Omløbstiden T defineres som den tid, der forløber ved et helt omløb. Ved et omløb forøges drejningsvinklen med 2π . Indsætter man derfor

$\Delta t = T$ og $\Delta\varphi = 2\pi$ i (6.4) finder man relationen.

(6.5) $$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{eller} \quad \omega T = 2\pi}$$

Frekvensen ν defineres som antallet af omløb pr. tidsenhed.
Er omløbstiden f.eks. $T = 0{,}2\,s$ er der åbenbart 5 omløb pr. sekund, og $\nu = 5\,s^{-1}$. Der gælder derfor formlerne:

(6.6) $$\boxed{\nu = \frac{1}{T} \quad \text{og hermed} \quad \omega = 2\pi\nu}$$

Enheden for frekvens er s^{-1}. Denne enhed kaldes som nævnt for Hertz.

7. HASTIGHED OG ACCELERATION I DEN JÆVNE CIRKELBEVÆGELSE.

I den jævne cirkelbevægelse er farten v konstant. Er drejningsvinklen blevet forøget med $\Delta\varphi$, er den tilbagelagte buelængde $\Delta s = r\Delta\varphi$. Farten i bevægelsen bestemmes da ved division med Δt.

(7.1) $$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \omega r}$$

Udtrykket for farten kan også udledes ved at notere sig, at buelængden svarende til et helt omløb er $2\pi r$. Da dette omløb tager tiden T, er farten $v = \frac{2\pi r}{T} = r\,\frac{2\pi}{T} = r\omega$.

I den jævne cirkelbevægelse kan stedvektorens variation med tiden findes ved at indsætte $\varphi = \omega t + \varphi_0$ i det generelle udtryk (6.1).

(7.2) $$\boxed{\vec{r} = (\, r\cos(\omega t+\varphi_0) \,,\, r\sin(\omega t+\varphi_0) \,)}$$

Hastighedsvektoren $\vec{v}$ er rettet langs med tangenten til cirklen, og $\vec{v}$ er derfor drejet vinklen $\frac{1}{2}\pi$ i forhold til $\vec{r}$. Da endvidere farten $v = |\vec{v}| = \omega|\vec{r}|$, følger det:

(7.3) $$\boxed{\vec{v} = \omega\hat{\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \omega(-r\sin(\omega t+\varphi_0) \,,\, r\cos(\omega t+\varphi_0) \,)}$$

Kap II

Udtrykket (7.3) for hastighedsvektoren er udledt ud fra fysiske og geometriske argumenter. Ifølge resultaterne i Kap II §2 kan man imidlertid også bestemme hastighedsvektoren ved at differentiere positionsvektoren $\vec{r}'(t) = \vec{v}$. Nu kan vi imidlertid benytte resultatet til at bestemme differentialkvotienten af funktionerne $\cos(\omega t+\varphi_0)$ og $\sin(\omega t+\varphi_0)$. Sammenholdes udtrykkene (7.2) for $\vec{r}$ og (7.3) for $\vec{v}$ med definitionsligningen $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ følger det nemlig umiddelbart.

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t+\varphi_0) = -\omega\sin(\omega t+\varphi_0) \quad \text{og} \quad \frac{d}{dt}\sin(\omega t+\varphi_0) = \omega\cos(\omega t+\varphi_0)$$

Formlerne ovenfor kan anvendes til at bestemme accelerationen i den jævne cirkelbevægelse.
Ifølge definitionen Kap II §3 kan accelerationen bestemmes ved at differentiere hastighedsvektoren $\vec{v}'(t) = \vec{a}$. Ved at benytte formlerne ovenfor på udtrykket (7.3) for $\vec{v}$ finder man således:

(7.4) $$\boxed{\vec{a} = -\omega^2(\, r\cos(\omega t+\varphi_0)\ ,\ r\sin(\omega t+\varphi_0)\,)}$$

Ligningerne (7.3) og (7.4) skrives lettest på vetorform. På figuren side 30 er alle vektorerne $\vec{r}$, $\vec{v}$ og $\vec{a}$ afsat.

(7.5) $$\boxed{\vec{v} = \omega\hat{r} \quad (\Rightarrow v = \omega r) \quad \text{og} \quad \vec{a} = -\omega^2\vec{r} \quad (\Rightarrow a = \omega^2 r)}$$

Af (7.5) ses, at accelerationsvektoren stedse er vinkelret på hastighedsvektoren, rettet mod centrum af cirkelbevægelsen. Accelerationen kaldes derfor som før nævnt for centripetalaccelerationen.
Ud fra ligningerne (7.5) finder man følgende tre ækvivalente udtryk for centripetalaccelerationen i den jævne cirkelbevægelse.

(7.6) $$\boxed{a_c = \omega^2 r \iff a_c = \omega v \iff a_c = \frac{v^2}{r}}$$

De to sidste udtryk er fremkommet ved at benytte at $v = \omega r$.

Ifølge Newtons 2. lov er en partikel med masse m, der udfører en

jævn cirkelbevægelse påvirket af en resulterende kraft $\vec{F}_{res} = m\vec{a}_c$.
Denne kraft kaldes for centripetalkraften.
Ved at anvende udtrykkene (7.6) for centripetalaccelerationen, finder man følgende to udtryk for størrelses af centripetalkraften F_c.

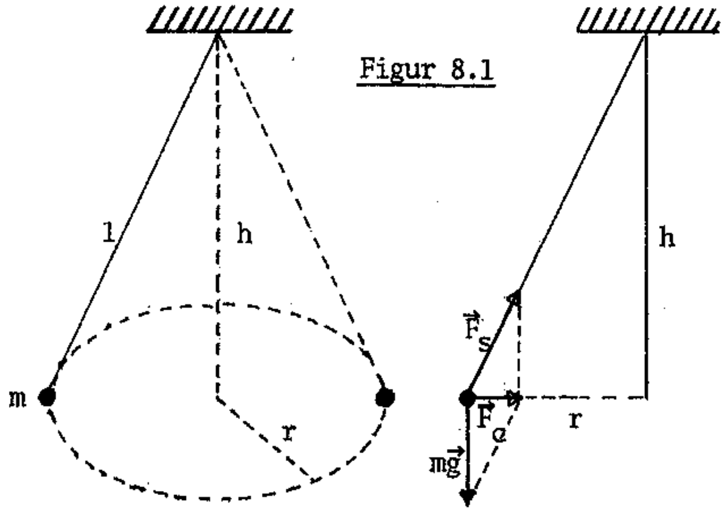
(7.7) $$\vec{F}_c = -m\omega^2\vec{r} \Rightarrow F_c = m\omega^2 r \Leftrightarrow F_c = m\frac{v^2}{r}$$

Det bemærkes, at den kraft der skal leveres for at opretholde en jævn cirkelbevægelse er rettet mod centrum af bevægelsen.

Udregner man centripetalkraftens effekt $\vec{F}\cdot\vec{v} = -m\omega^2\vec{r}\cdot\omega\hat{r} = 0$, ser man at den er lig med nul, idet $\vec{r} \perp \hat{r}$. Centripetalkraften udfører således intet arbejde i overensstemmelse med at farten i cirkelbevægelsen er konstant, så partiklens kinetiske energi er uforandret.

8. EKSEMPLER PÅ JÆVN CIRKELBEVÆGELSE.

8.1 Eksempel. Konisk pendul.



Figur 8.1

Et lod, der er ophængt i tyngdefeltet, kan bringes til at udføre en jævn cirkelbevægelse om en lodret akse. Snoren i loddet vil beskrive en "konus", og systemet omtales da som et konisk pendul.
Loddet er påvirket af tyngden $\vec{F}_T = m\vec{g}$ og snorkraften $\vec{F}_S$. Resultanten af disse to kræfter leverer den til cirkelbevægelsen nødvendige

Kap II

centripetalkraft $F_c = m\omega^2 r$
Snorens længde betegnes l*, højden fra ophængningspunkt til svingningsplan kaldes for* h *og* r *er radius i cirkelbevægelsen.*
Af de ensvinklede trekanter på figuren tilhøjre finder man:

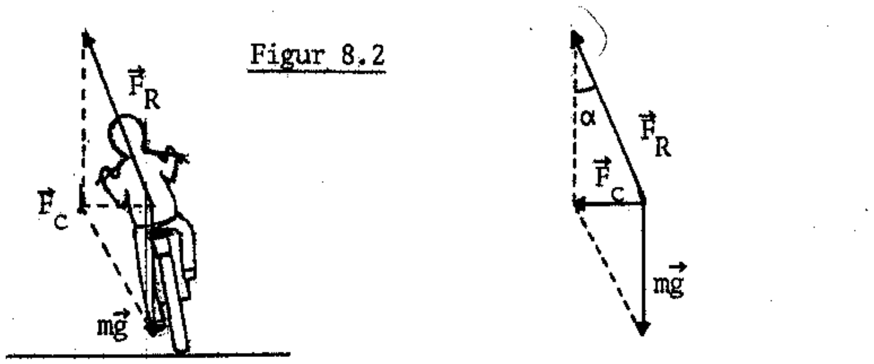
$$\frac{F_c}{mg} = \frac{r}{h} \Rightarrow \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{r}{h} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{h}$$

Benytter man at $\omega = \frac{2\pi}{T}$*, kan man finde et udtryk for omløbstiden* T.

$$(8.1.1) \qquad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{h} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

Formlen (8.1.1) kan benyttes til bestemmelse af tyngdeaccelerationen g.

8.2 Eksempel. Cyklist der drejer om et hjørne.



Figur 8.2

Når man gennemkører en kurve på cykel, skal man som bekendt læne sig ind i svinget. Dette gør man naturligvis for at opnå den til drejningen nødvendige centripetalkraft.
Figuren forestiller en cyklist i et sving. Cyklisten vil være påvirket af tyngden $\vec{F}_T = m\vec{g}$ *og en reaktionskraft fra vejbanen* $\vec{F}_R$.
Gennemkøres kurven med konstant fart udfører cyklisten en jævn cirkelbevægelse og resultanten af $\vec{F}_T$ *og* $\vec{F}_R$ *må være lig med centripetalkraften* $\vec{F}_c$*. Hvis* α *er den vinkel, som cyklisten danner med lodlinien, og* r *betegner radius i cirkelbevægelsen, ses det af figuren, at*

$$(8.2.1) \qquad tg\alpha = \frac{F_c}{mg} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg}$$

Kap II

8.4 Eksempel. Hammerkast

En hammerkaster kan kaste sin 6,0 kg hammer 54 m, når kastevinklen er 45^o. Bevægelsen af hammeren lige før den slippes antages at være en jævn cirkelbevægelse med radius lig med wire + arm = 2,0 meter. Idet man ser bort fra luftmodstand og den forskel der er i niveau ved kastets begyndelse og nedslagsstedet, skal man beregne følgende:

a) Udgangsfarten af hammeren.

b) Frekvensen i cirkelbevægelsen lige før hammeren slippes.

c) Den centripetalkraft, som kasteren må levere.

d) Massen af det legeme, som ophængt i tyngdefeltet er påvirket af den samme kraft.

Den største centripetalkraft, som kasteren kan yde (før armen ryger af), antages at svare til den kraft som massen 200 kg er påvirket af, når den er ophængt i tyngdefeltet

e) Hvor stor er udgangsfarten af hammeren, hvis centripetalkraften har denne størrelse, og hvor stor er den øvre grænse for kastevidden under denne antagelse.

Løsning.

a) Ifølge udtrykket (5.5.4) for kastevidden finder man, når $\alpha = 45^o$.

$$x = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow v = \sqrt{xg} = \sqrt{54\,m\; 9{,}82\,m/s^2} = 23{,}0\,m/s$$

8.5 Opgaver.

1) En bilist skal gennemkøre en kurve med den konstante fart 60 km/h. Kurven kan opfattes som en del af en cirkel med radius 40 m. Bestem den mindste værdi som friktionskoefficienten mellem vejbane og hjul kan have, for at gennemkørslen sker uden udskridning.

2) En person slynger en spand vand, der tilsammen har massen 5,0 kg rundt i en lodret cirkelbevægelse med radius 1,0 m.

a) Vis på en tegning de kræfter, som vandet i spanden er påvirket af, når spanden er i den øverste og nederste stilling.

b) Beregn den mindste fart som spanden må have i den øverste stilling for at vandet forbliver i spanden. (Selv om cirkelbevægelsen ikke er jævn, kan man godt anvende formlen (7.7) side 33 til at beregne centripetalkraften. Dette bliver begrundet i §9).

c) Idet man antager, at spandens fart i den øverste stilling er som beregnet i b), skal man ud fra energibevarelse beregne spandens hastighed, når den passerer den nederste stilling. (Det bemærkes, at personen ikke yder nogen tangentialkraft).

d) Beregn ud fra resultatet i c) trækkraften i armen, når spanden passerer den nederste stilling.

3) Et lod med massen 0,5 kg slynges rundt i en vandret cirkelbevægelse med radius 2,5 m og frekvensen 1,0 Hz. (Konisk pendul)

a) Beregn snorkraften og den vinkel som snoren danner med vandret.

4) Kraftoverførslen på en cykel foregår som bekendt via tandhjul. Tandhjulet hvor pedalerne er monteret har diameteren 20 cm. Tandhjulet, der er monteret på baghjulet har diameteren 6,0 cm. Radius i baghjulet er 36 cm. Pedalerne trædes rundt i en jævn cirkelbevægelse med frekvensen 0,50 s^{-1}.

a) Beregn vinkelhastighederne på det store og lille tandhjul.

b) Hvor hurtigt (km/h) kører cyklen under disse forhold.

5) Et bæger har form som en halvkugle med radius R. I bægeret er der

anbragt en lille kugle, og bægeret roteres nu med konstant vinkelhastighed ω om sin symmetriakse.

a) Udtryk ved hjælp af R, ω og tyngdeaccelerationen g, den højde h, hvor kuglen vil indstille sig i bægeret under rotationen.

b) Beregn den største vinkelhastighed, hvor kuglen er i hvile i bunden af bægeret.

9. UJÆVN CIRKELBEVÆGELSE. HASTIGHED OG ACCELERATION VED DIFFERENTIATION.

Hvis vinkelhastigheden ω ikke er konstant, kaldes cirkelbevægelsen for ujævn. Fasen $\varphi = \varphi(t)$ kan da være en vilkårlig funktion af tiden. Formler for hastighed og acceleration i den ujævne cirkelbevægelse kan udledes ved differentiation.
Positionen angives som tidligere ved stedvektoren $\vec{r}$.

$$\vec{r} = (r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi\ ) \quad \text{med} \quad \varphi = \varphi(t) \tag{9.1}$$

Ved differentiation af dette udtryk finder man.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-r\,\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\ ,\ r\,\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\ ) \tag{9.2}$$

Accelerationsvektoren bestemmes ved endnu en differentiation.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sin\varphi - r(\frac{d\varphi}{dt})^2\cos\varphi\ ,\ r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cos\varphi - r(\frac{d\varphi}{dt})^2\sin\varphi) \tag{9.3}$$

Vinkelhastigheden ω og vinkelaccelerationen α defineres nu ved ligningerne.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t) \quad \text{og} \quad \alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varphi''(t) \tag{9.4}$$

Udtrykt ved disse størrelser kan formlerne (9.2) og (9.3) skrives.

$$\vec{v} = \frac{d\varphi}{dt}\,\hat{r} = \omega\hat{r} \quad \text{og} \quad \vec{a} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\hat{r} - (\frac{d\varphi}{dt})^2\vec{r} = \alpha\hat{r} - \omega^2\vec{r} \tag{9.5}$$

For den generelle cirkelbevægelse finder man således, at centripetalaccelerationen $\vec{a}_c$ og tangentialaccelerationen $\vec{a}_t$ er givet ved udtrykkene:

(9.6) $$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r} \quad \text{og} \quad \vec{a}_t = \alpha \hat{r}$$

Størrelsen af disse vektorer er derfor

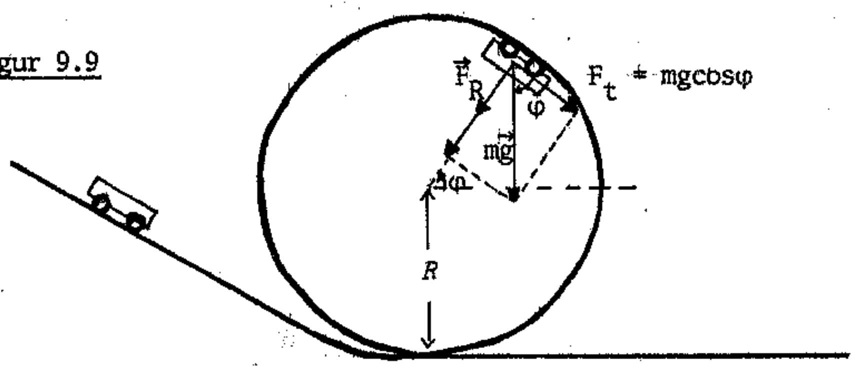
(9.7) $$a_c = \omega^2 r \quad \text{og} \quad a_t = \alpha r$$

Formlerne for den jævne cirkelbevægelse er specialtilfælde af disse udtryk. Indsætter man nemlig $\varphi = \omega t + \varphi_o$, finder man at $\omega = \varphi'(t)$ og $\alpha = \varphi''(t) = 0$. Vi genfinder da de tidligere udledte udtryk.

(9.8) $$\vec{v} = \omega \hat{r} \quad \text{og} \quad \vec{a} = -\omega^2 \vec{r} \quad \text{og} \quad \vec{a}_t = 0$$

9.9 Eksempel. Looping the loop

Figur 9.9



Vi vil betragte et eksempel på en ujævn cirkelbevægelse, hvor en lille vogn kører på en glat skinne, og foretager et "loop" som vist på figuren. Vi antager, at vognen har fået et tilløb, således at den har begyndelseshastigheden v_o i den nederste position ved cirkelbevægelsens begyndelse. Radius i cirklen betegnes R.
Under omløbet vil vognen være påvirket af tyngden $\vec{F}_T = m\vec{g}$ og en reaktionskraft $\vec{F}_R$ fra skinnen. Antages bevægelsen at være gnidningsfri er $\vec{F}_R$ vinkelret på skinnen, og bidrager derfor kun til centripetalkraften $\vec{F}_c$. Tyngden $\vec{F}_T$ bidrager derimod både til centripetal-

Kap II

kraften og tangentialkraften: Vi vil nu gøre følgende.

a) Anvende energibevarelse til at finde et udtryk for vognens kinetiske energi i et vikårligt punkt af cirkelbevægelsen.

b) Bestemme udtryk for centripetalkraft F_c, tangentialkraft F_t og reaktionskraft F_R.

c) Angive den mindste begyndelseshastighed vognen skal have for at gennemføre cirkelbevægelsen uden at falde ned.

<u>Løsning:</u>

a) Af figuren ses, at vognens højde $h = R + R\sin\varphi = R(1+\sin\varphi)$.

$$E = E_{kin} + E_{pot} \Rightarrow \tfrac{1}{2}mv_o^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgR(1+\sin\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mv_o^2 - mgR(1+\sin\varphi)$$

b) Centripetalkraften $F_c = m\frac{v^2}{R}$ kan findes ved at benytte udtrykket for den kinetiske energi.

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = \frac{mv_o^2 - 2mgR(1+\sin\varphi)}{R} = \frac{mv_o^2}{R} - 2mg(1+\sin\varphi)$$

Af figuren ses, at tangentialkraften $F_t = mg\cos\varphi$, og at der gælder relationen $F_c = F_R + mg\sin\varphi$. Heraf fås:

$$F_R = \frac{mv^2}{R} - mg\sin\varphi = \frac{mv_o^2}{R} - mg(2+3\sin\varphi)$$

c) Betingelsen for at vognen bliver på skinnen må være, at $F_R \geqq 0$ for $\varphi = \tfrac{1}{2}\pi$. Ved anvendelsen af udtrykket ovenfor giver dette:

$$\frac{mv_o^2}{R} - 5mg \geqq 0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}mv_o^2 \geqq \frac{5}{2}mgR \Leftrightarrow v_o \geqq \sqrt{5gR}$$

Af det midterste udtryk ovenfor indses, at vognen skal startes i en højde, der er mindst $\frac{5}{2}R$ for at den triller ned ad skinnen og gennemfører "loopen" uden at falde ned.