Bernoulli’s lov

Med eksempler fra
Hydrodynamik og aerodynamik

Indhold

Ole Witt-Hansen 2008

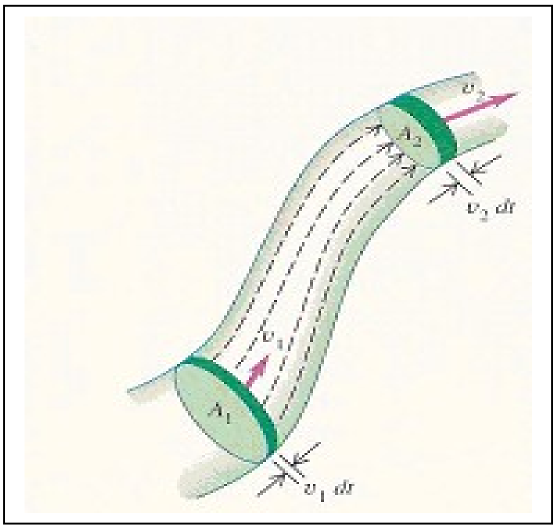
1. Indledning

Vi skal her udlede en af de mest grundlæggende lovmæssigheder i hydro- og aerodynamikken, opkaldt efter den store fysiker og matematiker Bernoulli, og som bærer hans navn.
Bernoulli's lov er udledt for laminar (dvs. ikke turbulent) strømning i væsker og gasser. Turbulent strømning betyder, at der er strømhvirvler. Beskrivelsen af turbulent strømning er næsten matematisk utilgængeligt.

2. Strømning i væsker

En stationær strømning betyder, at hastigheden af enhver væskepartikel på et givet sted er uforandret i størrelse og retning. En strømningslinie er en linie, der følger en væskepartikel.
Ved laminar strømning, kan strømningslinierne ikke være lukkede kurver.
I det følgende vil vi ret konsekvent anvende d i stedet for Δ til at betegne små (faktisk uendelig små) tilvækster. For eksempel skriver vi dv i stedet for Δv, og ds i stedet for Δs.

På denne måde bliver forholdet mellem to tilvækster til en differentialkvotient, f.eks.: $v = \dfrac{ds}{dt}$



På figuren er afgrænset et "rør", som følger strømningslinierne. (Det kunne godt være et virkeligt rør, som væsken viskositetsfrit strømmer igennem, men det er uvæsentligt).
Vi antager først at væsken er inkompressibel (usammentrykkelig), altså at massefylden ρ er den samme overalt, hvilket gælder for væsker, men ikke for gasser. På figuren er vist to tværsnit af røret: A_1 og A_2.
Væsken vil bevæge sig langsommere ved A_1 end ved A_2 fordi røret er tykkere på dette sted.
I tidsrummet dt forskydes væsken stykket ds_1 ved A_1, og stykket ds_2 ved A_2.
Væskerumfangene $dV_1 = A_1 ds_1$ *og* $dV_2 = A_2 ds_2$ må være ens, (da ρ er konstant) og da $ds_1 = v_1 dt$ og $ds_2 = v_2 dt$ finder man: $A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt$, eller

(2.1) $$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{(langs en strømningslinie)}$$

Hvis væsken (eller gassen) er kompressibel, vil det i stedet være masserne dm_1 og dm_2, der er ens i de to rumfang dV_1 og dV_2.

$$dm_1 = dm_2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 dV_1 = \rho_2 dV_2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 A_1 v_1 dt = \rho_2 A_2 v_2 dt$$

(2.2) $$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

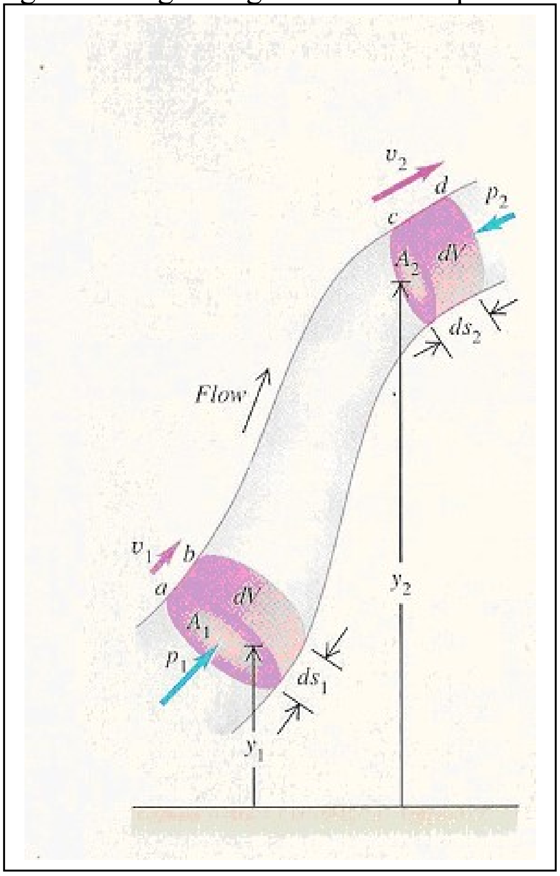
Hvor ρ_1 *og* ρ_2 *er* massefylderne ved (1) og (2) henholdsvis.

Ligningen (2.2) har mange andre anvendelser end ved væskestrømning. Den er for eksempel grundlaget for analyse af trafikale problemer (kødannelse) på motorveje. I denne sammenhæng betyder ρ tætheden af biler (som ikke er konstant) og v er hastigheden på et bestemt sted.
Hvis der hverken forsvinder eller bliver tilført biler, så fremgår det af ligningen, at hvis hastigheden formindskes, så bliver tætheden tilsvarende forøget. Da der er en naturlig grænse for tætheden for

biler på en motorvej, vil trafikken gå i stå, når denne tæthed nås. På samme måde, hvis antallet af vejbaner halveres, så skal hastigheden enten fordobles (næppe!) eller tætheden skal fordobles. Det sidste er velkendt.

3. Bernoulli's lov

Vi vil nu udlede Bernoulli's lov, som giver sammenhængen mellem trykket p i et punkt af væsken og strømningshastigheden v i dette punkt.



Vi ser igen på et "rør", som følger strømningslinierne. Når væsken forskubbes fra (a) til (b) ved (1), så forskubbes den fra (c) til (d) ved (2). Alle størrelser med indeks (1) er placeret i det nederste område, og alle størrelser med indeks (2) er fra det øverste område. (Se figuren). Det gælder fx trykkene p_1 *og* p_2. Det samlede arbejde, der udføres på væsken er $dW = F_1 ds_1 - F_2 ds_2$. Idet $F = pA$, kan et skrives.

(3.1) $$dW = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2 = p_1 dV_1 - p_2 dV_2$$

Hvis væsken er inkompressibel er $dV_1 = dV_2$.
Vi anvender nu en helt generel sætning: Hvis man ser bort fra gnidning (her viscositet), så er:

Udført arbejde = tilvæksten i energi.

(3.2) $$dW = dE_{kin} + dE_{pot}$$

Den kinetiske energi af væsken mellem (b) og (c) er uændret, da det er en stationær strømning. Derfor er tilvæksten i kinetisk energi forskellen mellem de kinetiske energier af væsken af de to væskerumfang ved (2) og (1).

$$dE_{kin} = ½(dm_2)\, v_2^{\,2} - ½(dm_1)\, v_1^{\,2} \quad \text{hvor} \quad dm_1 = dm_2 = \rho dV \quad \text{Heraf får man:}$$

(3.3) $$dE_{kin} = ½\, \rho\, v_2^{\,2} dV - ½ \rho\, v_1^{\,2} dV$$

På samme måde får man for den potentielle energi $E_{pot} = mgy$ (Lodrette akse betegnes y)

(3.4) $$dE_{pot} = (dm_2) g\, y_2 - (dm_1) g\, y_1 = \rho\, g\, y_2 dV - \rho\, g\, y_1 dV$$

Disse udtryk (3.1), (3.3) og (3.4) indsættes nu i (3.2).

$$p_1\, dV - p_2\, dV = ½\, \rho\, v_2^{\,2} dV - ½ \rho\, v_1^{\,2} dV + \rho\, g\, y_2 dV - \rho\, g\, y_1 dV$$

Efter bortforkortning af dV, og ordning efter indeks (1) og (2) på venstre og højre side, får man.

$$p_1 + ½\rho\, v_1^{\,2} + \rho\, g\, y_1 = p_2 + ½\, \rho\, v_2^{\,2} + \rho\, g\, y_2$$

Denne ligning kaldes for Bernoulli's lov og den udtrykker, at

(3.5) $p + \frac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho\, g\, y = konstant$ (langs en strømningslinie).

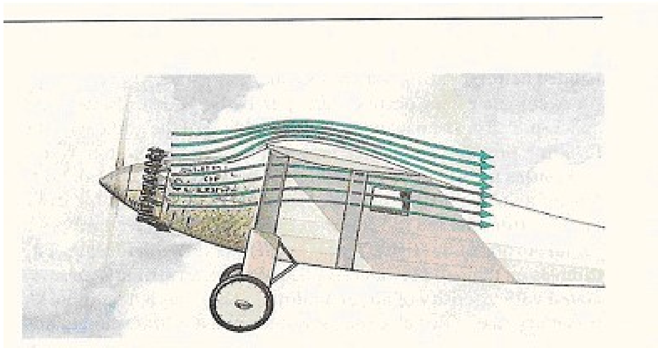
Vi har udledt Bernoulli's lov under 3 forudsætninger:

1) Laminar strømning (ingen turbulens/strømhvirvler)
2) Viscositetsfri væske (gas) (Intet energitab som følge af gnidning).
3) Inkompressibel (usammentrykkelig) væske (gas).

Det er yderst sjældent at alle disse tre betingelser er opfyldt samtidig, men alligevel danner Bernoulli's lov grundlaget for de fleste teoretiske beregninger i hydrodynamikken.
I aerodynamikken er man i almindelighed henvist til empiriske (ud fra forsøg) lovmæssigheder, vindtunnelforsøg og 100 års ingeniør erfaringer.

4. Hvorfor kan man flyve

Alligevel kan Bernoulli's lov give en kvalitativ forklaring på, hvorfor det er muligt at flyve (uden at baske med vingerne) – noget som altid har været (og stadig er) et mysterium for de fleste.



14–26 Flow lines around an airplane wing.

Figuren demonstrerer Bernoulli's lov.
Den viser en flyvemaskinevinge. På grund af vingens form, skal luften passere en længere vej over vingen, end under vingen, og luften over vingen får dermed en større hastighed. Ifølge Bernoulli's lov betyder dette, at trykket på oversiden er mindre end trykket på undersiden. Det er denne trykforskel, der giver en opdrift, som kompenserer for tyndekraften på maskinen.

Konstruktion af fly er mere baseret på ingeniørkunst, erfaring og vindtunnelforsøg – end på teoretiske beregninger. Aerodynamik er overordentlig kompliceret, især når der kommer turbulens – og det gør der i aerodynamikken.

3.6 Eksempel:
For at illustrere Bernoulli's lov, vil vi lave et enkelt (urealistisk) regneeksempel.

Vi antager, at hastigheden af luften er 20% større på oversiden af vingen end på undersiden.
Vi finder da fra Bernouli's lov: (Da der er ikke noget bidrag fra potentiel energi).

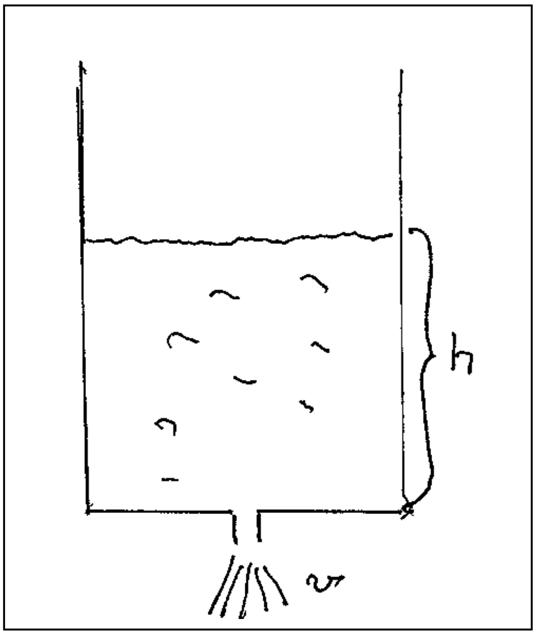
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\, v^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\,(1{,}2v)^2 \quad => \quad \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\; 0{,}44v^2.$$

Indsætter man $\rho = \rho_{luft} = 1{,}29\ kg/m^3$, $v = 360\ km/h = 100\ m/s$, finder man:

$\Delta p = 2{,}84\cdot 10^3\ N/m^2 = 2{,}84\cdot 10^{-2}\ atm = 284\ kp/m^2$. $1\ atm. \approx 10^5\ N/m^2 \approx 1\ kp/m^2$.

Med et vingefang å 20 m^2 svarer dette til en opdrift på: $284\ kp/m^2\ 20\ m^2 = 5.680\ kp$.
Dette svarer til tyngden af 5,68 ton.

5. Tømning af en beholder via en hane i bunden



Vi betragter en beholder fyldt med viscositetsfri væske fyldt op til en højde *h* over udløbsventilen (studsen) i bunden. Væsken har massefylden ρ.
Vi anvender herefter Bernoullis lov, men udelader leddet med trykkket, da vi antager at det *ydre* tryk er det samme på overfladen, som i bunden af væsken, og vi erstatter *y* med *h* til at betegne dybden. Herefter er Bernoulli's lov.

(4.1) $\frac{1}{2}\rho\, v_1^{\,2} + \rho\, g\, h_1 = \frac{1}{2}\rho\, v_2^{\,2} + \rho\, g\, h_2$

Ved overfladen er $h = 0$ og $v = 0$, og i dybden *h* er hastigheden *v*.

Herved giver Bernoullis lov det samme som gælder for et frit fald i tyngdefeltet:

(4.2) $\frac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho\, g(-h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$

v er hastigheden, hvormed væsken løber ud af hanen. Hvis massen af væsken i beholderen til tidspunktet *t* betegnes $m = m(t)$, og hvis røret til hanen har tværsnitsarealet D, gælder kontinuitetsligningen for den mængde væske *dm*, der i tidsrummet *dt* strømmer ud gennem hanen.

$$\frac{dm}{dt} = -\rho D v.\ \text{(Minustegnet fordi } m \text{ aftager).}$$

Hvis beholderens tværsnit er *A*, er samtidig $m = \rho A h$, så $\frac{dm}{dt} = \rho A \frac{dh}{dt}$

Ved at sætte de to udtryk for $\frac{dm}{dt}$ lig med hinanden, finder man: $\rho A \frac{dh}{dt} = -\rho D v$ og indsættes udtrykket $v = \sqrt{2gh}$, får man følgende differentialigning for *h*.

(4.3) $\rho A \frac{dh}{dt} = -\rho D \sqrt{2gh} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\sqrt{2g}\frac{D}{A}\sqrt{h}$

Ligningen kan løses ved separation og integration

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}\frac{D}{A}dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{h_0}^{h}\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}\frac{D}{A}\int_0^t dt \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{h} - 2\sqrt{h_0} = -\sqrt{2g}\frac{D}{A}t \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \sqrt{2g}\frac{D}{2A}t \quad \Leftrightarrow$$

(4.4) $$h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{D\sqrt{2g}}{2A} t \right)^2$$

Beholderen er tømt, når h = 0. Det sker ifølge ligningen ovenfor til tidspunktet: $t = \frac{A}{D}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

For en beholder med A = 50 x 50 cm^2, h_0 =1,0 m, og D=2,0 cm^2. Giver det en tid for tømning, som er 564 s.