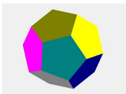
Banekurven for et projektil.
Det skrå kast

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk



Ole Witt-Hansen 2008

5. Banekurven for et projektil. Det skrå kast

Som indledning vil vi betragte det skrå kast uden luftmodstand, også for at kunne sammenligne med kastet, når der er luftmodstand.

5.1 Skråt kast uden luftmodstand

Vi antager at en partikel affyres med elevationen θ (vinklen med vandret), og med begyndelseshastighed v_0. De velkendte bevægelsesligninger er:

(5.1) $$\vec{F}_{res} = m\vec{g} \quad \text{hvor} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ v_0 \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{(Begyndelseshastigheden)}$$

Bevægelsen er med konstant acceleration i x- y planen, hvorfor der gælder ligningerne.

(5.2) $$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0 \qquad \text{og} \qquad \vec{r} = \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

Sætter vi $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ finder man ved direkte indsætning i (5.2)

(5.3) $$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ v_0 \sin\theta - gt \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \, t \\ v_0 \sin\theta \, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

Stighøjden kan bestemmes ved at sætte $v_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g}$, som indsat i y giver:

(5.4) $$y_{\max} = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$$

Kastevidden (længden af kastet) kan bestemmes ved at løse ligningen $y = 0$:

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 \sin\theta \, t - \tfrac{1}{2} g t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$t = 0 \quad \vee \quad t = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

Kastevidden bestemmes da ved at indsætte den anden løsning i udtrykket for x, som kan reduceres til: (idet $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$)

(5.5) $$x_{\max} = \frac{v_0^{\,2} \sin 2\theta}{g}$$

Det længste kast opnås ved $\sin 2\theta = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 45^0$, som det er velkendt fra den elementære fysikundervisning.

Banekurven er i øvrigt en parabel, hvilket kan ses, ved at eliminere tiden t fra de to ligninger for x og y. Man finder:

$$y = x \tan\theta - \frac{\frac{1}{2}g}{(v_0 \cos\theta)^2} x^2$$

Kurven kaldes som bekendt en kasteparabel.

5.2 Skråt kast med luftmodstand

Ved hastigheder blot over 5,0 m/s er antagelsen om laminar strømning næppe opfyldt, men bevægelsesligningerne lader sig ikke løse analytisk, hvis der er tale om turbulent strømning. Ved turbulent strømning er gnidningskraften $F_{gn} = v^{\beta}$, hvor $1 < \beta \le 2$. Så vi vil foreløbig nøjes med at løse bevægelsesligningerne for laminar strømning.
For bevægelse i gasser, kan man i almindelighed se bort fra opdriften, så i dette tilfælde er:

(5.6) $$F_{gn} = \alpha |\vec{v}| \quad og \quad \vec{F}_{gn} = -\alpha \vec{v}$$

Bevægelsesligningerne bliver da:

(5.7) $$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{\alpha}{m}\vec{v} \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v_x \quad og \quad \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{\alpha}{m}v_y$$

Disse to differentialligninger har vi imidlertid allerede løst for en retlinet bevægelse i (3.4) og (3.5).
Er begyndelseshastigheden $\vec{v} = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$, finder man løsningerne:

(5.8) $$v_x = v_0 \cos\theta \cdot e^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t} \quad og \quad v_y = v_0 \sin\theta \cdot e^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t} - \frac{mg}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t})$$

Hvis $\frac{\alpha}{m}\cdot t$ << 1, altså hvis gnidningsmodstanden er forsvindende lille, så kan man benytte tilnærmelsen $e^x \approx 1 + x$.

(5.9) $$v_x = v_0 \cos\theta \cdot (1 - \frac{\alpha}{m}\cdot t) \quad og \quad v_y = v_0 \sin\theta \cdot (1 - \frac{\alpha}{m}\cdot t) - \frac{mg}{\alpha}(1 - (1 - \frac{\alpha}{m}\cdot t))$$

Hvis vi dropper alle led, proportionale med α, finder man de tidligere udledte udtryk for skråt kast uden gnidning (hvilket altid er betryggende i en teoretisk udledning).

$$v_x = v_0 \cos\theta \quad og \quad v_y = v_0 \sin\theta - g \cdot t$$

For at finde positionen (*x,y*), skal vi integrere (5.2) med hensyn til tiden.
Vælger vi $(x_0, y_0) = (0,0)$, finder man:

$$x = v_0 \cos\theta \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t} dt \quad og \quad y = v_0 \sin\theta \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t} dt - \frac{mg}{\alpha}\int_0^t (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t}) dt$$

(5.10) $$x = v_0 \cos\theta \cdot \frac{m}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t}) \quad og \quad y = v_0 \sin\theta \cdot \frac{m}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t}) - \frac{mg}{\alpha}(t - \frac{m}{\alpha}\cdot(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}\cdot t}))$$

Igen, hvis $\frac{\alpha}{m}\cdot t \ll 1$, altså hvis gnidningsmodstanden er forsvindende lille, kan man benytte tilnærmelsen $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + ½\cdot x^2$ med $x = \frac{\alpha}{m}\cdot t$. Hvis man dropper alle led, der er proportionale med α, finder man igen de tidligere udledte udtryk for skråt kast uden gnidning

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t \qquad og \qquad y = v_0 \sin\theta \cdot t - ½ g \cdot t^2$$

Hverken (5.8) eller (5.10) er særlig gennemskuelige eller anvendelige til teoretiske beregninger. Det er muligt at finde stighøjden, idet ligningen $v_y = 0$, godt kan løses, for at bestemme *t*, som så kan indsættes i udtrykket for *y*.
Man kan imidlertid ikke finde et analytisk udtryk for kastevidden, idet ligningen (5.3) y = 0, er en transcendent ligning. Vi skal senere se på numerisk løsning af differentialligninger.

Som omtalt kan bevægelsesligningerne for det skrå kast ikke løses, hvis luftmodstanden er proportional med v^2, men nedenfor er angivet en numerisk løsning med værdier for α = 0 (ingen luftmodstand) , α = 0.0001, α = 0.0005, α = 0.001.