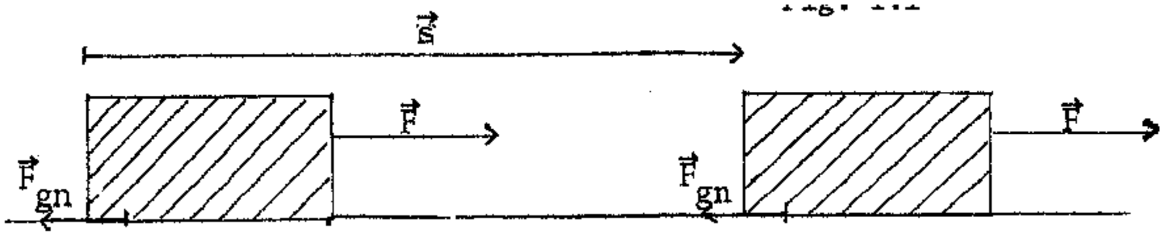
Arbejde og mekanisk energi

Indhold

Ole Witt-Hansen 1975 (2015)

1. En krafts arbejde

I det foregående kapitel, blev kraft-begrebet præciseret. Vi skal nu fortsætte med at indføre en fysisk definition af begreberne arbejde og mekanisk energi.



Figuren forestiller en kasse, der er placeret på et vandret underlag.
Påvirker vi kassen med en konstant vandret kraft $\vec{F}$, som er større end gnidningskraften $\vec{F}_{gn}$, vil kassen være i bevægelse i i kraften $\vec{F}$'s retning..
Har kassen bevæget sig et stykke, givet ved forskydningsvektoren $\vec{s}$ i $\vec{F}$'s retning, siger man at kraften $\vec{F}$ har udført et arbejde: $A = F \cdot s$, hvor $F = |\vec{F}| \;\; og \;\; s = |\vec{s}|$.
Med en løsere formulering, udtrykkes dette:

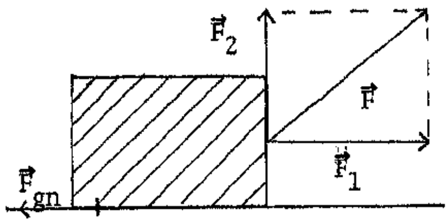
(1.1)	Arbejde = Kraft x vej	=>	$A = F \cdot s$

Af ligningen (1.1) ses, at SI-enheden for arbejde er lig med SI-enheden for kraft gange SI-enheden for længde.
Enheden bliver hermed Newton gange meter. Denne enhed kaldes for Joule og skrives J.

Enheden for arbejde er Joule lig med Newton gange meter. $1J = 1\ N\ m$.

Bemærk, at det følger af definitionen, at det udførte arbejde ikke afhænger af,
1. massen af det legeme, der flyttes
2. Den tid det tager at flytte legemet stykket s,
3. Om legemet var i bevægelse eller hvile, da kraften begyndte at virke.

Fig. 1.3



Det er kun kræfter, der virker i bevægelsens retning, der udfører arbejde. På figuren til venstre, er vist en situation, hvor kraften $\vec{F}$ danner en vinkel med retningen af forskydningen $\vec{s}$.
Kraften $\vec{F}$ kan opløses i en komposant $\vec{F}_1$ parallel med $\vec{s}$, og en komposant $\vec{F}_2$ vinkelret på $\vec{s}$.
Kraften $\vec{F}_2$ udfører intet arbejde, da kassen ikke bevæger sig i $\vec{F}_2$ s retning, men $\vec{F}_1$ udfører ifølge det foregående et arbejde, som er $F_1 \cdot s$, hvor $s = |\vec{s}|$, og F_1 er projektionen af $\vec{F}$ på retningen af $\vec{s}$

På figuren er $\vec{F}_1$ ensrettet med $\vec{s}$, (og dermed projektionen positiv), men hvis projektionen er modsat rettet $\vec{s}$ er F_1 negativ, og hermed bliver det udførte arbejde også negativt.
Hvis man bremser en bevægelse, udfører man et negativt arbejde.

Kræfterne $\vec{F}$ og $\vec{F}_1$ udfører åbenbart det samme arbejde, og dette fører til følgende definition af arbejde, som også gælder, når $\vec{F}$ og $\vec{s}$ ikke er ensrettede.

1.3 Definition

En konstant kraft $\vec{F}$'s arbejde ved forskydningen $\vec{s}$, er defineret som kraften $\vec{F}$'s projektion på forskydningens retning $\vec{s}$ gange den tilbagelagte vej $s = |\vec{s}|$.

2. Arbejde udtrykt ved et skalarprodukt

Givet to vektorer $\vec{F}$ og $\vec{s}$, definerer man i matematikken det skalære produkt (skalarproduktet) af $\vec{F}$ og $\vec{s}$ som længden af den ene vektor gange den andens projektion på den første.

Projektionen regnes med fortegn i forhold til den første vektors orientering.

Det skalære produkt eller blot skalarproduktet skrives: $\vec{F} \cdot \vec{s}$

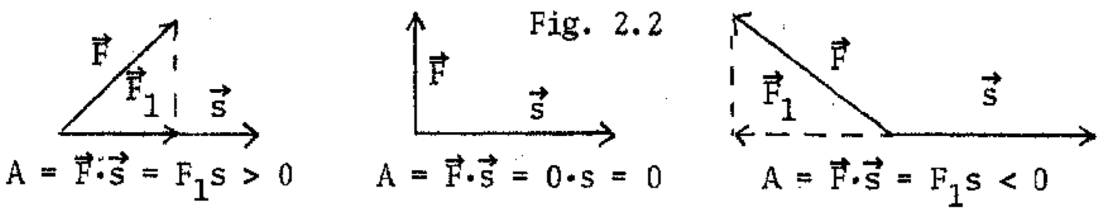
Skalarproduktet kaldes også og for prikprodukt. Bemærk, at i modsætning til gangetegnet, kan man ikke udelade prikken i skalarproduktet.

Vi bemærker så, at definitionen af skalarproduktet er identisk med definitionen af en krafts arbejde, når $\vec{F}$ betyder kraft og $\vec{s}$ betyder forskydning.

Vi kan herefter mere formelt definere en konstant kraft $\vec{F}$'s arbejde ved forskydningen $\vec{s}$, som skalarproduktet af $\vec{F}$ med $\vec{s}$.

(2.1) $$A = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Nedenfor er vist, hvordan fortegnet bliver for skalarproduktet $\vec{F} \cdot \vec{s}$, og dermed fortegnet for arbejdet A, ved forskellige placeringer af $\vec{F}$ og $\vec{s}$.



Hvis v betegner vinklen mellem $\vec{F}$ og $\vec{s}$, følger det således af skalarproduktet.

$A = \vec{F} \cdot \vec{s} > 0 \quad når \quad 0 \le v < 90^0$, $A = \vec{F} \cdot \vec{s} = 0 \quad når \quad v = 90^0$ og

$A = \vec{F} \cdot \vec{s} < 0 \quad når \quad 90^0 < v \le 180^0$

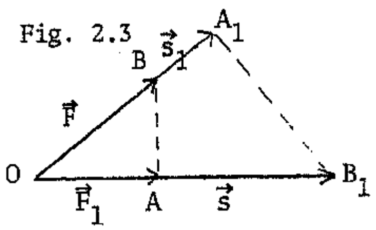


Fig. 2.3

Det følger endvidere af en simpel geometrisk overvejelse, at $\vec{F} \cdot \vec{s} = \vec{s} \cdot \vec{F}$.

På figuren har vi tegnet vektorerne $\vec{F}$ og $\vec{s}$, samt deres projektioner på hinanden F_1 og s_1.

F og s betegner som sædvanlig længderne af $\vec{F}$ og $\vec{s}$.
Ifølge definitionen af skalarprodukt er $\vec{F} \cdot \vec{s} = F_1 s \quad og \quad \vec{s} \cdot \vec{F} = s_1 F$.

Af de ensvinklede trekanter OAB og OA_1B_1 følger det imidlertid, at

(2.4) $$\frac{F}{s} = \frac{F_1}{s_1} \quad \Leftrightarrow \quad s_1 F = F_1 s \quad \Leftrightarrow \quad \vec{s} \cdot \vec{F} = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Ifølge den ovenstående, kan vi altså også udregne arbejdet, som kraften F gange vejens projektion på kraftens retning.

Endelig kan skalarproduktet også udregnes ved hjælp af *cosinus* til vinklen v mellem de to vektorer.

(2.4) $$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{s}\right| \cos v$$

På figurerne (1.1) og (1.3) udfører kraften $\vec{F}$ et positivt arbejde. Gnidningskraften derimod er rettet modsat bevægelsen, og udfører et negativt arbejde. Dette følger af definitionen på skalarprodukt.

$$A_{gn} = \vec{F}_{gn} \cdot \vec{s} = \left|\vec{F}_{gn}\right|\left|\vec{s}\right| \cos v = -\left|\vec{F}_{gn}\right|\left|\vec{s}\right|$$

Enhver kraft, der bremser en bevægelse, udfører et negativt arbejde.

Det kan måske virke overraskende, at der ikke udføres noget arbejde, når $\vec{F}$ er vinkelret på $\vec{s}$. Skal man f.eks. bære en tung kuffert 2 *km*, bliver man muligvis træt, men man udfører kun et arbejde, idet man løfter kufferten, mens der intet arbejde udføres (i mekanisk forstand), når kufferten bæres i samme højde de 2 *km*., hvis bevægelsen er jævn.

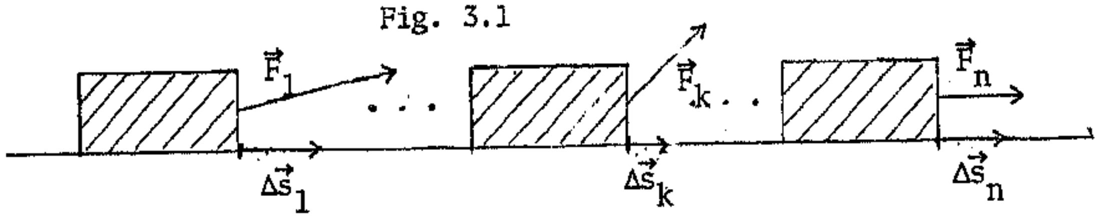
Dette er imidlertid i overensstemmelse med den forestilling, at der kræves en maskine (i videste betydning) for at udføre et arbejde. Det er klart, at der skal en maskine (en kran) til at løfte kufferten, men herefter kan man blot anbringe kufferten på en gnidningsfri skinne (f.eks. en luftpudebænk af svær konstruktion) og give den et lille skub, hvorefter kufferten, ifølge inertiens lov, vil glide de to kilometer uden yderlige assistance.

3. En krafts arbejde, når kraften ikke er konstant, eller vejen ikke retlinet

Vi skal først betragte en retlinet bevægelse, hvor kraften $\vec{F}$ kan variere både i størrelse eller retning. For at udregne kraften $\vec{F}$'s arbejde ved forskydningen $\vec{s}$, vil vi dele $\vec{s}$ op i forskydninger $\Delta\vec{s}_1, \Delta\vec{s}_2, \Delta\vec{s}_3, ..., \Delta\vec{s}_{n1}$, der hver er så små, at $\vec{F}$ kan antages at være konstant i hvert af disse små stykker.

Det samlede udførte arbejde ved forskydningen: $\vec{s} = \Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2 + \Delta\vec{s}_3 + ... + \Delta\vec{s}_n$, kan således bestemmes ved at addere alle ΔA_k 'erne.

Fig. 3.1



(3.2) $$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + ... + \Delta A_n = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{s}_2 + \vec{F}_3 \cdot \Delta\vec{s}_3 + ...\vec{F}_n \cdot \Delta\vec{s}_n$$

Disse formler skrives lettest ved hjælp af det såkaldte summationstegn.

(3.3) $$A = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{s}_k \qquad \text{og} \qquad \vec{s} = \sum_{k=1}^{n} \Delta\vec{s}_k$$

k (ethvert andet bogstav kan anvendes) kaldes for indeks, og summen udregnes ved først at sætte k = 1 (nedre grænse) i udtrykket, der står til højre for summationstegnet (man siger "under" summationstegnet) og addere det til det, man får ved at sætte k =2, og fortsætte således indtil øvre grænse $k = n$ er nået.

Hvis bevægelsen ikke er retlinet, mens kraften er konstant, må man dele vejen op i så små stykker, at bevægelsen kan betragtes som retlinet på dette stykke. (Se figuren).

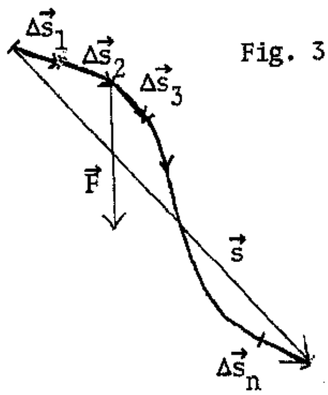


Fig. 3.4

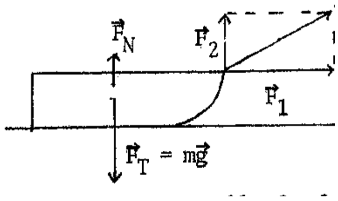
Arbejdet kan da udregnes efter formlen (3.3), men med den nye betydning af $\Delta\vec{s}_k$.
Vi vil benytte den samme formel til at udregne arbejdet ved en krum bevægelse, men hvor vi nu antager at kraften $\vec{F}$ er konstant.
Kurven kunne f.eks. være en rutsjebane, hvor vi vil udregne det arbejde, som tyngdekraften $\vec{F} = m\vec{g}$, udfører på et barn med massen m.
Da kraften $\vec{F}$ er konstant, kan den sættes uden for summationstegnet og man finder:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}_k = \vec{F} \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta\vec{s}_k = \vec{F} \cdot \vec{s} \qquad \text{hvor} \quad \vec{s} = \sum_{k=1}^{n} \Delta\vec{s}_k$$

Sumvektoren $\vec{s}$ er vist på figuren. Udregningen viser, at i tilfælde af en krum bevægelse, men med en konstant kraft $\vec{F}$, kan kraftens arbejde udregnes som skalarproduktet af kraften $\vec{F}$ med den vektor $\vec{s}$, der forbinder bevægelsens begyndelsespunkt med dets endepunkt.

Hvis bevægelsen f.eks. begynder og slutter på samme sted, vil kraftens arbejde være lig med nul. Denne sætning er vigtig, når man skal beregne den potentielle energi i tyngdefeltet.

3.6 Eksempel



En slæde, der med belastning vejer 150 *kg* trækkes i en snor, der danner en vinkel på 30^0 med slædens vandrette bevægelsesretning. Gnidningskoefficienten mellem mederne og sneen er 0,05.

a) Hvor stor en trækkraft, skal der ydes for at slæden bevæger sig med konstant hastighed?
b) Hvor stort et arbejde ydes der ved at trække slæden 500 *m*?

Løsning: Som vist på figuren opløser vi trækkraften $\vec{F}$ i en vandret komposant $F_1 = F\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}F$ og en lodret komposant $F_2 = F\sin 30^0 = \frac{1}{2}F$. I lodret retning er normalkraften F_N lig med reaktionskraften fra underlaget, som er forskellen på F_T (tyngdekraften på slæden) og F_2. $F_N = F_T - F_2$. Gnidningskraften beregnes ud fra normalkraften.

$$F_{gn} = \mu F_N \quad \wedge \quad F_N = F_T - F_2 = mg - \tfrac{1}{2}F \quad \Rightarrow \quad F_{gn} = \mu(mg - \tfrac{1}{2}F)$$

Jævn bevægelse betyder, at accelerationen $a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{res} = 0$ *og* $F_{res} = F_1 - F_{gn} \Rightarrow F_1 = F_{gn}$.

Størrelsen af F, kan altså beregnes ud fra ligningen $F_1 = F_{gn}$, hvor vi indsætter de fundne udtryk for F_1 og F_{gn}.

$$F_1 = F_{gn} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{\sqrt{3}}{2}F = \mu(mg - \tfrac{1}{2}F) \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} + \mu)F = \mu mg \quad \Leftrightarrow$$

$$F = \frac{mg}{\frac{1}{2}(\sqrt{3} + \mu)} = \frac{0{,}05 \cdot 150\,kg \cdot 9{,}82\,m/s^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{3} + \mu)} = 82{,}7\ N$$

Arbejdet som trækkraften udfører, kan udregnes ud fra formlen:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F_1 s = \tfrac{\sqrt{3}}{2} 82{,}7\ N \cdot 500\,m = 3{,}58\,10^4\ J\ .$$

3.7 Opgave

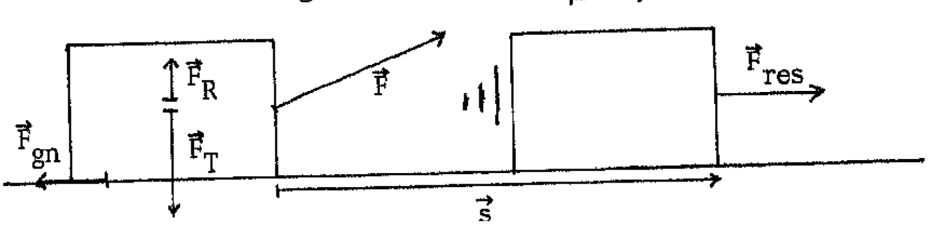
En spand mørtel, der vejer 22 *kg*, skal anvendes på et stillads ud fra 5. sal (18 *m* over fortovet),

a) beregn det arbejde, der skal udføres for at hejse spanden de 18 m op.
b) Beregn også det arbejde, der udføres ved at bære spanden op ad trapperne (tilbagelagt vej 55 *m*), for at række den ud på stilladset.

4. Kinetisk energi. Arbejdssætningen

Vi vil dette afsnit indføre en præcis kvantitativ definition på begrebet mekanisk energi, og som bringer os i stand til at udregne de energier, der omsættes under udførelsen af et arbejde.

Fig. 4.1



Vi betragter endnu engang en legeme med masse *m*, der trækkes på et vandret underlag.

Den resulterende kraft på legemet er vektorsummen af trækkraften $\vec{F}$, Tyngdekraften $\vec{F}_T$, gnidningskraften $\vec{F}_{gn}$ og reaktionskraften fra underlaget $\vec{F}_R$

Vi antager at $\vec{F}$, og dermed den resulterende kraft $\vec{F}_{res}$ er konstant. Vi antager endvidere i første omgang at begyndelseshastigheden er nul.

Vi vil udregne den resulterende kraft $\vec{F}_{res}$'s arbejde ved forskydningen $\vec{s}$.

Idet $\vec{F}_{res}$ og $\vec{s}$ er ensrettede kan vi undlade vektorstregerne, når vi blot husker at regne størrelserne med fortegn. Det søgte arbejde kan herefter direkte udregnes, som: $A_{res}=F_{res}\cdot s$.

Vi anvender nu Newtons 2. lov: $F_{res} = m\cdot a$, hvor a er legemets acceleration, samt I.5.4 for konstant accelereret bevægelse uden begyndelseshastighed, ifølge hvilket $v^2 = 2a\cdot s$, hvor v er den hastighed et legeme opnår, når det fra hvile accelereres på strækningen s.

(4.2) $$A_{res}=F_{res}\cdot s \quad \text{og} \quad F_{res} = m\cdot a \quad \text{og} \quad s = \frac{v^2}{2a} \quad => \quad A_{res} = ma\frac{v^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad A_{res} = \tfrac{1}{2}mv^2$$

Den resulterende krafts arbejde er altså lig med $\frac{1}{2}mv^2$.

Helt generelt gælder der i fysikken, at når en kraft udfører et arbejde på et legeme, så tilfører kraften energi til legemet, som er lig med størrelsen af det udførte arbejde.

I dette tilfælde omsættes arbejdet til bevægelse af legemet og den tilsvarende energi kaldes for bevægelsesenergi eller kinetisk energi. Dette skriver man:

(4.3) $$E_{kin} = \tfrac{1}{2}mv^2$$

(4.3) kan opfattes som en definitionsligning for kinetisk energi.

(4.2) udtrykker da åbenbart, at den resulterende krafts arbejde omsættes til kinetisk energi.

SI enheden for (kinetisk) energi er den samme som for arbejde, som det fremgår af (4.2), men det kan også vises direkte, ved at erstatte størrelserne med deres SI enheder i udtrykket for den kinetiske energi: $kg\ (m/s)^2 = kg\ m/s^2\ m = N\ m = J$. SI enheden for kinetisk energi er Joule (J).

Vi skal nu gentage beregningen, der førte frem til (4.2), men nu med den ændring, at legemet antages at have en begyndelseshastighed v_0.

Vi udregner igen den resulterende krafts arbejde, ved forskydningen ($s - s_0$), og her gælder den anden af formlerne II.5.4

$$A_{res} = F_{res}(s - s_0) \quad \wedge \quad F_{res} = ma \quad \wedge \quad 2a(s - s_0) = v^2 - {v_0}^2 \quad \Rightarrow$$

(4.4) $$A_{res} = F_{res}(s - s_0) = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}m{v_0}^2$$

Den sidste ligning udtrykker (helt generelt for en retlinet bevægelse), at den resulterende krafts arbejde på et legeme er lig med legemets tilvækst i kinetisk energi.

Dette kaldes for arbejdssætningen, som er en af de vigtigste sætninger i mekanikken.

Den skrives ofte på den korte form: $A_{res} = F_{res}\Delta s = \Delta E_{kin}$

Arbejdssætningen gælder også for en retlinet bevægelse, hvor kraften ikke er konstant.
(Den gælder også for en krumlinet bevægelse, men det venter vi med indtil vi kan anvende integralregning)

Hvis kraften F_{res} ikke er konstant langs vejen $s - s_0$, deler vi vejen op i så små stykker $\Delta s_i = s_i - s_{i\text{-}1}$, at vi kan antage at kraften $F_{res}(i)$ for konstant på hvert af disse små stykker.
I hvert af intervallerne Δs_i er den resulerende kraft konstant, og vi kan derfor anvende formlen (4.4) til at beregne arbejdet. Det samlede udførte arbejde, findes da ved summation.

$$A_{res} = \sum_{i=1}^{n} F_{res}(i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{1}{2}mv_i^{\ 2} - \tfrac{1}{2}mv_{i-1}^{\ 2})$$
$$= \tfrac{1}{2}mv_1^{\ 2} - \tfrac{1}{2}mv_0^{\ 2} + \tfrac{1}{2}mv_2^{\ 2} - \tfrac{1}{2}mv_1^{\ 2} + \ldots + \tfrac{1}{2}mv_n^{\ 2} - \tfrac{1}{2}mv_{n-1}^{\ 2} = \tfrac{1}{2}mv_n^{\ 2} - \tfrac{1}{2}mv_0^{\ 2} \quad \Rightarrow$$

(4.5) $$A_{res} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^{\ 2}$$

(4.6) Arbejdssætningen:

For enhver retlinet bevægelse gælder det, at den resulterende krafts arbejde på et legeme er lig med legemets tilvækst i kinetisk energi.
$$A_{res} = \Delta E_{kin}$$

4.7 Eksempel
Motoren i en bil med massen m = 900 kg leverer via kraftoverførslen en kraft på 800 N. Gnidningskraften sættes ti 3% af vognens tyngde. Bilen antages, at have begyndelseshastigheden v_0 = 10 m/s.

a) Angiv bilens hastighed efter, at den har kørt 100 m.
b) Beregn motor og gnidningskraftens arbejde på denne strækning.

Løsning:
a) Trækkraften F = 800 N og gnidningskraften F_{gn} = 0,03 mg = 265 N. $F_{res} = F - F_{gn}$ = 535 N.
Til beregning af hastigheden v, anvender vi arbejdssætningen:

$$F_{res}s = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^{\ 2} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}mv^2 = F_{res}s + \tfrac{1}{2}mv_0^{\ 2} \quad \Rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 == 535\ N\ 100\ m + \tfrac{1}{2}900\ kg\ (10\ m/s^2) = 985\ 10^4\ N \quad \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{9{,}85\ 10^4\ N}{450\ kg}} = 14{,}8\ m/s$$

b) Motorkraftens arbejde er: $F \cdot s$ = 800 N 100 m =8,0 10^4 J
Gnidningskraftens arbejde er: $F_{gn} \cdot s$ = - 265 N 100 m =-2,65 10^4 J

5. Effekt

For en maskine, er man ofte interesseret i, hvor meget arbejde den kan udføre pr tidsenhed (pr. sek). Dette kalder man maskinens effekt.
Udfører maskinen f.eks. et arbejde på 600 J i løbet af 10 sek., siger man at maskinen har en effekt på 600 J/10 s = 60 J/s. SI enheden for effekt er altså Joule pr. sek.

Denne enhed kaldes for Watt og forkortes W. Effekt betegnes med stort bogstav P (Power)

(Sammenhængen med den velkendte elektriske enhed, vil fremgå i afsnittet om elektricitetslære).
Vi definerer således:

(5.1) Effekt = Arbejde pr. tidsenhed (SI enhed 1 W = 1 J/s)

Når det drejer sig om motorer, har man traditionelt benyttet enheden *hestekraft* som enhed for effekt. Hestekraft forkortes *hk* eller *hp*. En hestekraft er defineret ved:

(5.2) 1 Hestekraft = 736 W

Det bemærkes, at "hestekraft", hverken har noget med heste eller kraft at gøre, men er en enhed for effekt, men i sin oprindelse er det vel den effekt, som en fransk normalhest kunne yde i 1794

Den kraft $\vec{F}$, der giver et legeme en forskydning $\Delta\vec{s}$ i tidsrummet Δt, udfører et arbejde $\vec{F}\cdot\Delta\vec{s}$.
Hvis vi skal udregne kraftens effekt, skal vi åbenbart dividere med Δt. Vi finder således:

(5.3) Kraftens effekt: $P = \vec{F}\cdot\dfrac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

Effekten af en kraft til et givet tidspunkt, udregnes altså som skalproduktet af kraften $\vec{F}$ og hastigheden $\vec{v}$.
Hvis kraft og hastighed er ensrettede til dette tidspunkt, gælder der: $P = F\cdot v$.

5.4 Eksempel
I annoncen for en bil, står der, at bilen har en "motorkraft" på 60 *hk* og en acceleration: Fra 0 til 60 *km/h* på 6,0 sek
Den bemeldte bil vejer 900 *kg*. Gnidningsmodstanden ved kørsel på en plan vej sættes skønsmæssigt til 5% af vognens tyngde. Kan disse specifikationer passe?
Løsning
Vi skal antage, at hastighedsforøgelsen sker med konstant acceleration. Vi omregner 60 *km/h* til SI enheder = 16,7 *m/s*

Ifølge specifikationerne er (middel)accelerationen: $a = \dfrac{16{,}7\ m/s}{6{,}0\ s} = 2{,}78\ m/s^2$.

Vi udregner derefter trækkraften *F's* effekt.

$$F_{res} = F - F_{gn} = ma \quad \Rightarrow \quad F = F_{res} + F_{gn} \quad \Rightarrow \quad P = F\cdot v = (F_{res} + F_{gn})v = (ma + 0.05mg)v$$

Motorens maximale effekt fås ved hastigheden 60 *km/h* = 16,7 *m/s* . Indsættes dette i udtrykket for *P*, fås:
’
$P = (900\ kg\ 2{,}78\ m/s^2 + 0{,}05\cdot 900\ kg\ 9{,}82\ m/s^2)16{,}7\ m/s = 4{,}90\ 10^4\ W.$

Omregnet til *hk*, giver det: $P = 4{,}90\ 10^4 : 736\ hk\ = 66{,}6\ hk$

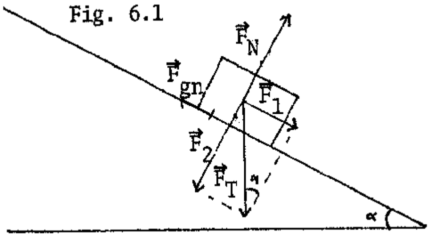
Når man overvejer de antagelser, hvorefter beregningen er foretaget (konstant acceleration), kan oplysningerne i annoncen godt være rigtige.

5.5 Opgave
To mænd skal skubbe en bil i gang på en vandret vej. Bilen vejer 1400 *kg*, og gnidningskraften antages at være konstant lig med 5% af vognens tyngde.
Først skubbes bilen i gang med den konstante acceleration 0, 10 m/s^2 i 10 sek. Derefter skubbes den videre med den opnåede fart.

a) Bestem kraftpåvirkningen, som mændene yder under accelerationen.
b) Hvor stort et arbejde ydes der i de første 10 sek.
c) Hvor stor en effekt ydes der, når den konstante fart er nået? Udtryk denne effekt i *hk*.

6. Bevægelse på skråplan

Figuren forestiller en plan klods, der glider ned af et skråplan, som danner vinklen α med vandret. Gnidningskoefficienten mellem klods og skråplan betegnes μ.



På figuren er indtegnet de kræfter, som klodsen er påvirket af, nemlig: Tyngdekraften $\vec{F} = m\vec{g}$, normalkraften fra skråplanet $\vec{F}_N$ og gnidningskraften $\vec{F}_{gn}$.
Den resulterende kraft er vektorsummen af disse 3 kræfter.
Vi opløser nu tyngden i en komposant $\vec{F}_1$ langs med skråplanet, og en komposant $\vec{F}_2$ vinkelret på skråplanet.
Af figuren ses (ud fra de trigonometriske formler) for den retvinklede trekant at:

$$F_1 = mg\sin\alpha \qquad og \qquad F_2 = mg\cos\alpha$$

Da endvidere $F_N = F_2$, kan vi bestemme gnidningskraften $F_{gn} = \mu F_N = \mu mg\cos\alpha$.
Den resulterende kraft er rettet langs med skråplanen, og vi ser, (når klodsen glider ned ad skråplanen), at:

$$F_{res} = F_1 - F_{gn} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Accelerationen a er konstant og kan bestemmes ud fra Newtons 2. lov: $F_{res} = ma$.

(6.1) $$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Specielt er bevægelsen jævn, hvis $a = 0$.

(6.2) $$a = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\alpha - \mu\cos\alpha = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \tan\alpha = \mu$$

(6.2) kan anvendes til en eksperimentel bestemmelse af μ, idet man hæver skråplanet, indtil at en klods, der er sat i gang, bevæger sig med konstant hastighed ned af skråplanet.

6.3 Eksempel
En cyklist kører frihjul ned af en 50 m lang bakke, hvor bakkens hældning er 9^0. Ved toppen af bakken er cyklistens hastighed 5,0 *km/h*. Luftmodstand og gnidning kan skønsmæssigt repræsenteres ved en gnidningskoefficient $\mu = 0{,}04$.
Cyklist med cykel vejer tilsammen 100 *kg*.
a) Bestem hastigheden af cyklisten ved foden af bakken.
Løsning
Vi bestemmer først den resulterende kraft ifølge (6.1):

$$F_{res} = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 100\,kg\;9{,}82\,m/s^2(\sin 9^0 - 0{,}04\cos 9^0) = 115\,N$$

Vi anvender dernæst arbejdssætningen: $F_{res}s = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2$ til bestemmelse af sluthastigheden *v*.

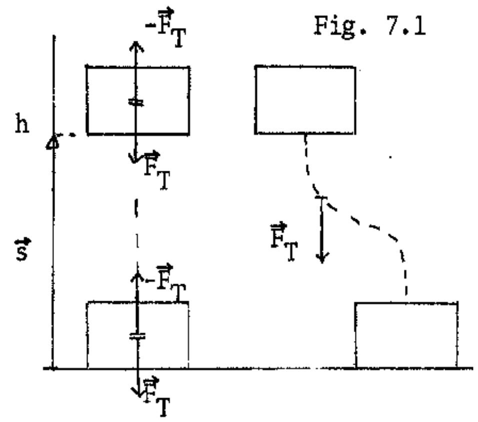
$$\tfrac{1}{2}mv^2 = F_{res}s + \tfrac{1}{2}m{v_0}^2 = 115\,N\;50\,m + \tfrac{1}{2}100\,kg\;(5{,}0\,m/s)^2 = 8{,}0\,10^3\;J \quad \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{8{,}0\,10^3\;N}{50\,kg}} = 12{,}6\,m/s = 45{,}4\,km/h$$

7. Energiforholdene i tyngdefeltet. Potentiel energi

Et legeme med masse *m*, er nær jordens overflade påvirket af den samme konstante kraft $\vec{F}_T = mg$.

Man udtrykker dette ved, at der nær jordens overflade er der et homogent (ens overalt) kraftfelt, som kaldes for tyngdefeltet, og $\vec{F}_T = mg$ kaldes for feltkraften.



Løfter man et legeme med masse *m* fra jordoverfladen i en jævn bevægelse, skal man påvirke det med en kraft $-\vec{F}_T = -m\vec{g}$, som er lige så stor, men modsat rettet tyngdekraften.
Hvis legemet herved får en lodretforskydning $\vec{s}$, hvor $|\vec{s}| = h$ er højden over jordoverfladen, har man åbenbart udført et arbejde, som er

(7.2) $$A = (-\vec{F}_T \cdot \vec{s}) = F_T h = mgh$$

Ved at udføre dette arbejde, har man åbenbart tilført energi til legemet. Loddet vil nemlig være i stand til at udføre det samme arbejde ved at løfte et lod magen til, hvis lodderne er forbundet via en trisse.

Den energi, som et legeme med masse m har ved at befinde sig stykket *h* over jordoverfladen kaldes for beliggenhedsenergi eller potentiel energi. Potentiel energi betegnes: E_{pot}.

7.3 Definition

Ved et legemes potentielle energi i tyngdefeltet, når det har massen *m* og befinder sig stykket *h* over jordoverfladen, forstår man størrelsen:

$$E_{pot} = mgh$$

SI enheden for potentiel energi er den samme som enheden for arbejde, nemlig Joule (J).

Der er flere ting at bemærke til denne definition:
For det første: Det arbejde der skal udføres til at bringe massen m til positionen h, afhænger kun af denne position, men ikke af vejen, der er tilbagelagt fra jordoverfladen op til positionen h. Betragter man nemlig en krumlinet vej, som vist på figur (7.1) , har denne vej samme projektion på feltkraften, som den lodrette vej. Arbejdet med at bringe massen m op til positionen h er derfor ifølge (3.5) det samme.

For det andet: Vi har som nulpunkt for den potentielle energi $h = 0$ valgt jordoverfladen, men nulpunktet kan vælges helt vilkårligt. Laver man forsøg i et laboratorium, vil man normalt vælge bordoverfladen som nulpunkt.
Denne vilkårlighed i valget af nulpunkt for potentiel energi, hænger sammen med at man altid regner energier i tilvækster, og en tilvækst er uafhængig af valget af nulpunkt.

Tilvæksten i potentiel energi ved forskydningen fra højden h_1 til højden h_2 er givet ved udtrykket:

$$\Delta E_{pot} = E_{pot}(2) - E_{pot}(1) = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h$$

Denne tilvækst er åbenlyst uafhængig af valget af nulpunkt på h aksen.

For det tredje: Når legemet løftes stykket h udfører feltkraften $\vec{F}_T = m\vec{g}$ et negativt arbejde $A_{felt} = \vec{F}_T \cdot \vec{s} = -mgh$, fordi $\vec{F}_T \;\; og \;\; \vec{s}$ er modsat rettede.
Befinder legemet sig derimod i højden h og slippe, vil feltkraften udføre et positivt arbejde, idet $\vec{F}_T \;\; og \;\; (-\vec{s})$ er ensrettede. Og man finder:

(7.5) $$A_{feltkraft} = \vec{F}_T \cdot (-\vec{s}) = mgh$$

Feltkraftens arbejde er ligeledes uafhængig af den bane, som legemet følger fra højden h til jord, og feltkraftens arbejde er lig med den potentielle energi af legemet i højden h.
Dette fører til følgende definition af potentiel energi, som er helt i overensstemmelse med vores tidligere definition, men som er mere generel, idet den også kan anvendes for andre kraftfelter end tyngdefeltet.
7.6 Definition

Ved den potentielle energi af et legeme i et punkt P, forstår man det arbejde, som feltkraften udfører, når legemet føres fra punktet P til nulpunktet for potentiel energi, langs en vilkårlig bane.

Potentiel energi defineres kun i kraftfelter, hvor feltkraftens arbejde, når et legeme føres fra et punkt til et andet, er uafhængig af den valgte vej mellem de to punkter.
I dette tilfælde kaldes kraften konservativ.

En typisk ikke konservativ kraft er gnidningskraften. Skal man f.eks. flytte et flygel fra en position til en anden, er gnidningskraftens (og dermed ens eget) arbejde næppe uafhængig af den valgte vej. Man vælger jo nok den korteste vej.

7.7 Opgave
En klods, med massen 1,5 *kg* glider 2,0 *m* ned ad et skråplan, der danner en vinkel på 30^0 med vandret. Gnidningskoefficienten er 0,15.

a) Udregn Den potentielle energi af klodsen, når den er i hvile ved start.
b) Udregn gnidningskraftens arbejde under bevægelsen.
c) Den kinetiske energi af klodsen ved foden af skråplanet.
d) Hvad er sammenhængen mellem de 3 udregnede størrelser.

8. Energibevarelse i tyngdefeltet

Vi tænker os nu, at vi har et legeme med masse m, der befinder sig i højden h_0 over jordoverfladen. Hvis legemet slippes, er det påvirket af den resulterende kraft $\vec{F}_T = m\vec{g}$.
Lad os antage, at legemet er faldet til højden h, altså er faldet stykket $h_0 - h$, hvor det nu har fået hastigheden v.

Til bestemmelse af denne hastighed, kan vi anvende arbejdssætningen, der udtrykker at den resulterende krafts arbejde. $F_T(h_0 - h)$ er lig med tilvæksten i kinetisk energi, som er $\frac{1}{2}mv^2$. Indsætter man $F_T = mg$, får man ligningen.

(8.1)	$mg(h_0 - h) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Leftrightarrow \quad mgh_0 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$

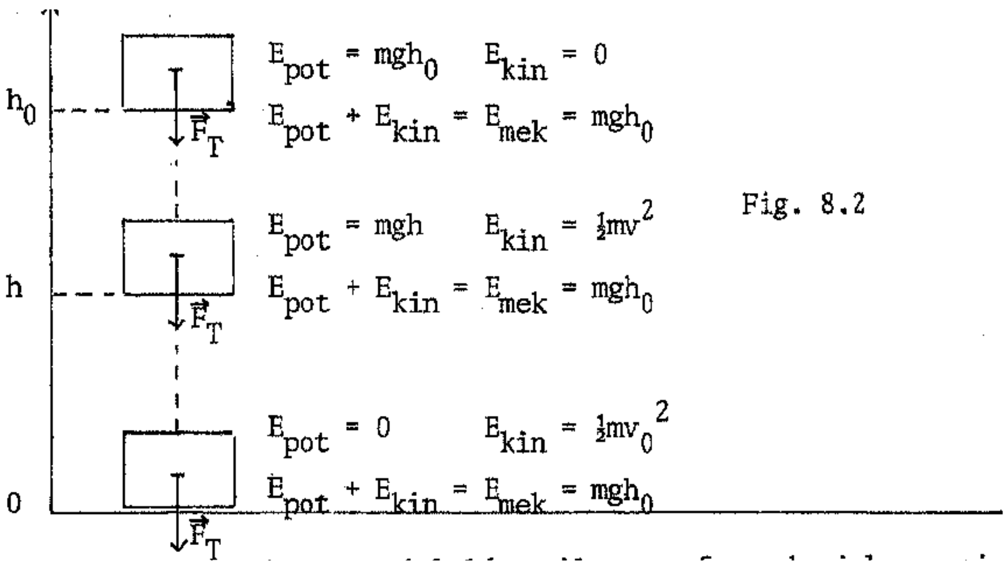


Fig. 8.2

<u>Ligningen 8.1 udtrykker, at summen af kinetisk og potentiel energi er den samme under hele faldet.</u>

<u>Kinetisk og potentiel energi, kaldes tilsammen for mekanisk energi.</u>

<u>Dette kan også udtrykkes, at den mekaniske energi er bevaret.</u>

Dette er et eksempel på den vigtigste lovmæssighed i fysikken overhovedet, nemlig at der gælder energibevarelse. Energi kan hverken opstå eller forsvinde, men omdannes fra én energiform til en anden under udførelse af et arbejde

Bevarelsen af den mekaniske energi, kan formuleres på flere måder. Vi betragter igen figur (8.2).

Hvis hastigheden i højden h_1 er v_1, og hastigheden i højden h_2 er v_2,, så må der ifølge (8.1) gælde:

$$
\begin{aligned}
&(mgh_0 =)\ mgh_1 + \tfrac{1}{2}mv_1^{\,2} = mgh_2 + \tfrac{1}{2}mv_2^{\,2} && \Leftrightarrow \\
(8.3)\qquad &E_{pot}(1) + E_{kin}(1) = E_{pot}(2) + E_{kin}(2) && \Leftrightarrow \\
&E_{pot}(2) - E_{pot}(1) + E_{kin}(2) - E_{kin}(1) = 0 && \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta E_{mek} = 0$$

Summen af tilvæksterne i kinetisk og potentiel energi er nul. Hvad der mistes af potentiel energi, genfindes som kinetisk energi og omvendt, hvis et legeme bevæger sig op i tyngdefeltet.

Den sidste ligning udtrykker at tilvæksten i mekanisk energi er nul, hvilket er det samme som, at den mekaniske energi er bevaret

Lige før legemet rammer jorden er alt potentiel energi omdannet til kinetisk energi, og derfor:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^{\,2} = mgh_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gh}$$

Hvis legemet er helt uelastisk, f.eks. en pose med blyhagl, vil den blive liggende, der hvor den rammer jorden. Den mekaniske energi er tilsyneladende forsvundet. Vi skal dog siden se, at der ved en nøjagtig måling af blyhaglenes temperatur, kan påvises, at den kinetiske energi er blevet omdannet til termisk energi i blyhaglene.

9. Den potentielle energi af en strakt fjeder

Vi skal nu se på et andet eksempel på potentiel energi, idet vi vil udregne den elastiske energi af en strakt fjeder.
For strækning af en spiralfjeder gælder, at den kraft F man skal påvirke fjederen med for at opnå en forlængelse på x, er proportional med F. Der gælder således:

$$F = kx$$

Hvor k er en konstant, der kaldes for fjederkonstanten, og som har SI enheden N/m.

Loven om proportionalitet mellem kraft og forlængelse, kaldes for Hookes lov.

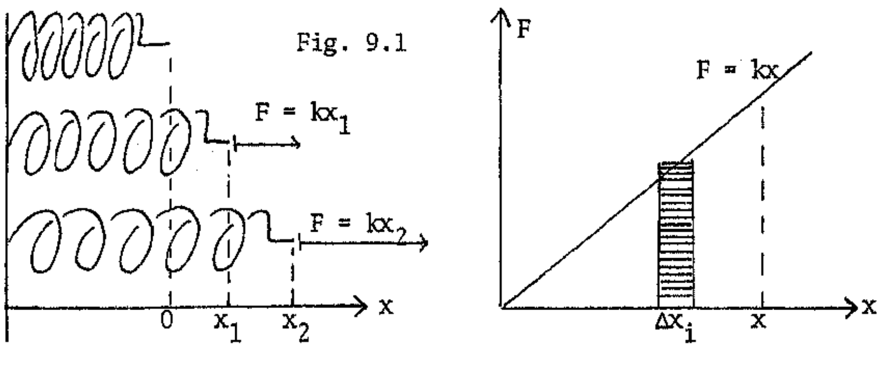


Fig. 9.1

Vi vil nu udregne det arbejde som (felt)kraften F skal udføre for at forlænge fjederen stykket x.
Vi bemærker, at kraften F ikke er konstant på stykket x.
Vi må derfor, som beskrevet i afsnit 3 dele vejen $[0, x]$ op i så små stykker Δx_i, at kraften med god tilnærmelse kan antages at være konstant lig med $F_i = kx_i$ på stykket Δx_i , og så addere alle de små arbejder $\Delta A_i = F_i \, \Delta x_i$, som kraften udfører på stykket Δx_i . Opskrevet med summationstegn får vi:

(9.2) $$A = \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta x_i \qquad hvor \;\; \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad og \quad x_n = x$$

På figuren (9.1) har vi afbildet kraften F som funktion af x.
Man bemærker, at det i'te led i summen er lig med arealet af det lille skraverede rektangel.
Hele summen er derfor lig med arealet under linien fra 0 til x.
Dette areal kan imidlertid udregnes om arealet af en trekant med kateterne x og kx.
Arealet er derfor: $½kx \cdot x = ½kx^2$.

Den strakte fjeder, vil herefter være i stand til at udføre et arbejde $½kx^2$ på omgivelserne, og man siger derfor at fjederen har den potentielle energi: $E_{pot} = ½kx^2$. (jævnfør definition 7.6: Det arbejde, som feltkraften udfører, når fjederen føres fra den spændte stilling ved x til nulpunktet $x = 0$.

Vi definerer derfor den elastisk potentielle energi af en fjeder, med fjederkonstant k, og som er forlænget stykke x, som

(9.3) $$E_{pot} = \tfrac{1}{2} kx^2$$

SI enheden for elastisk potentiel energi, er den samme som for arbejde, altså Joule (J)